声　　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

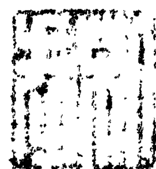
作者签名：戴峰　　日期：2010.6.12

关于学位论文使用权的说明

本人完全了解太原科技大学有关保管、使用学位论文的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交学位论文的原件、复印件与电子版；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存学位论文；③学校可允许学位论文被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换学位论文；⑤学校可以公布学位论文的全部或部分内容（保密学位论文在解密后遵守此规定）。

作者签名：戴峰　　日期：2010.6.12

导师签名：　　日期　2010-06-12





中 文 摘 要

在数学的漫长发展史中，悖论的出现引起了数学领域的三次危机，特别是集合论悖论的出现所引发的第三次数学危机对数学界的震动最大、影响最深。数学家和逻辑学家们围绕由于数学基础动摇而出现的第三次危机，在寻求其解决办法的过程中形成了各种学派，如以罗素为主要代表的逻辑主义学派，以布劳威尔为主要代表的直觉主义学派，以希尔伯特为主要代表的形式主义学派以及以策梅罗为代表的公理化集合论学派等，并且形成了各种不同的集合论分支：如罗素的分支类型论，策梅罗的公理化集合论等。这些无疑对集合论的发展做出了重要贡献，并且在一定程度上促进了数学和其他相关学科的发展。本文从哲学的视角对数学史上的第三次危机进行了详尽的阐述和分析，说明了数学危机对数学的发展不是一种灾难与绝望，而是引导人们向未知领域探索的向导，是促进数学繁荣和发展的动力，是科学发展的强大杠杆，具有重要的方法论意义；同时，分析了其对数学观念问题、现代数学及其他科学的发展产生的深远影响，表明第三次数学危机刺激数学进入一个新的黄金时代；并且通过在哲学的视角下分析数学危机的实质和规律，得出启示：数学危机与实践的发展相关，其发生具有循环性特征。

本文主要由四个部分组成：

第一部分，介绍并分析了第三次数学危机产生的背景。

第二部分，阐述了第三次数学危机的解决情况，包括策梅罗的公理化集合论对悖论的应对以及关于现代数学基础的大论战。

第三部分，阐述了第三次数学危机对现代科学发展的影响。

第四部分，阐述了第三次数学危机的哲学意蕴。具体从三个方面分析：第三次数学危机引起了绝对主义数学真理观的变革；第三次数学危机带来了思维方法的变革；结合数学发展史上的前两次危机，说明实践的发展是数学危机产生的根源，数学危机具有循环性特征，在一定程度上是可以认识和预测的。

关键词：第三次数学危机；集合论；数理逻辑；悖论；后现代性

ABSTRACT

In the long development history of mathematics, mathematical paradoxes caused three mathematical crises, especially the third crisis that caused by paradoxes in set theory is most influential in the mathematical community. Since the emergence of the third crisis, mathematicians and logicians have formed a variety of schools,in the process of seeking the solution to the foundations of mathematics, such as the logical school of thought that Russell is the chief representative, the intuitive school of thought that Brouwer is the main representative, the formalism of Hilbert as the main representative, as well as Zermelo axiomatic set theory, represented such school,and so on. At the same time, a various of branches of set theory began to take shape, such as Russell theory, Zermelo axiomatic set theory and so on. Undoubtedly, These theories contributed much to the development of set theory, and they promoted the development of other interrelated subjects. The thesis elaborates the third mathematical crisis in development history of mathematics from the perspective of philosophy in detail, which explains that a mathematical crisis is not a kind of disaster and desperation, but to guide people to explore the unknown fields and promote mathematics'prosperity and development,and is a powerful lever of science development, and the crisis has important methodology significance; at the meanwhile, this paper analyzes its influence on mathematical concepts and the development of modern mathematics and other subjects, which makes it clear that the third mathematical crisis stimulates the mathematical study to enter a new golden age; moreover, we can realize that mathematical crises are releted to practical development, which occur periodically, by means of analyzing the essence and regularity of mathematical crises viewed in line with philosophy.

The thesis contains four main parts:

The first chapter introduces and analyzes the background of the third mathematical crisis.

The second chapter elaborates the solution situation of the third mathematical crisis, including Zermelo axiomatic set theory's reaction to paradoxes of set theory, and the controversy about mathematic basis which was caused by the third mathematical crisis.

The third chapter expounds the influence of the third mathematical crisis in the development of modern science, which brings so new gold era.

The last chapter discusses the philosophic meaning of the third mathematical crisis, which concretely analyzes upon three respects: the third mathematical crisis leads to the change in the absolute doctrine of mathematical truth; the third mathematical crisis gives rise to the change of the way of thinking; combining previous mathematical crises in the history of mathematic, it illustrates that practical development is the root of mathematical crises which have common characteristics, and which occurs periodically, and which is predictable and recognizable to a certain degree.

Key words: The third mathematical crisis; Set theory; Mathematical logic; Paradox; Post-modernity

目 录

第一章 引 言

在数学的发展史上，曾经出现过三次举世瞩目的危机。三次数学危机都是伴随着新的数学思想、方法及学科的产生而产生，而且根源都是离散与连续的矛盾，即与人们对“无限”认识的发展紧密相连。这三次数学危机，尤其是第三次数学危机的产生与相对解决，对数学及其他科学的发展有着极其深远的影响。

目前所见到的文章，有很多是涉及到对第三次数学危机的历史回顾与综述，而对于其对某些分支学科的影响、其哲学意义、以及对未来的展望却不是很多。

因此，笔者从哲学的视角对第三次数学危机进行了分析和论述，系统地分析了以上各个方面的问题，包括其产生的背景、解决途径、对现代科学发展的影响，以及其哲学意义。

本文通过对第三次数学危机产生的背景及结果进行哲学分析，有助于我们认识和理解：悖论——这种特殊的逻辑思维方法，是科学研究的一种重要方法，它对于促进科学理论产生突破性的发展和引导人们向未知领域的探索都具有重要意义；科学研究应具有正确的哲学指导思想——辩证唯物主义，应具有怀疑批判的头脑，善于进行求异思维，以及具有敢于坚持自己的观点、不为权威和传统势力所吓倒的大无畏精神；第三次数学危机带来了数学的黄金时代，刺激着整个科学的发展，使得数学的应用更加广泛。

本文对第三次数学危机的研究，使得我们对数学危机有更加深入的认识，即在其发生的时候不会引起数学研究的萧条，反而刺激数学学科本身的发展和一些原有数学观念的突破和创新。每一次重大的数学进步都要突破固有的数学观念，第三次数学危机，在很大程度上动摇了以形而上学为基调的传统数学真理观念，这样，经典数学中的确定性、永恒性和绝对性丧失了，数学真理性的变革成为数学发展的必然趋势。同时，后现代思潮的兴起，使得现代性的科学观念受到强烈的冲击，数学真理及其观念相应地展现出许多不同于现代性观念的后现代特征。这些新特征极大地丰富了数学真理的内涵，开拓了人类理性认识的新维度。可以说，数学真理观正逐步从现代性转向后现代性。

本文的创新之处在于：将数学危机“不同于一般危机”的特征从哲学的全新视角详尽地阐述，指出其不是灾难与绝望，而是一种促进数学及其他科学发展的向导和动力；第三次数学危机促进原有数学观念的突破和创新，即经典数学中绝对性、确定性、永恒性的真理观念受到冲击，数学真理观念从现代性转向后现代性；从第三次数学危机出发并结合前两次数学危机，阐述了数学危机的实质与规律，指出数学危机的发生与实践的发展相关，具有循环性特征。这些将对科学研究具有重要的意义。

本文用到的研究方法主要有三种：①文献资料的综合分析法。在论文的写作过程中，

笔者搜集了大量关于第三次数学危机的学术论文和专著，并对这些文献资料进行了认真、细致的研读和分析，重要的是在对其综合研究和分析的基础上，提出了自己的新观点，并加以详细地论述。②比较分析法。在综合分析的同时，笔者又通过第三次数学危机与前两次危机的比较和对照，找出其共性，从而进一步得出数学危机的实质和规律，说明数学危机的发生与实践的发展相关，数学危机具有循环性特征。③归纳演绎法。归纳演绎法可以说是贯穿整篇论文，从第三次数学危机产生的背景、根源，到第三次数学危机引起的结果——策梅罗提出公理化集合论试图消除悖论产生的条件以及关于数学基础的学派论争，再到第三次数学危机带来了新的黄金时代：刺激了数学的大发展、促进了其他科学的发展，甚至到第三次数学危机的认识论和方法论意义及其哲学启示，都可以体现归纳演绎科研方法的运用。

第二章 第三次数学危机产生的背景

19世纪是科学的世纪，近代自然科学在这个世纪发展到较深入、较全面的地步，在数学领域也表现出前所未有的发展和成就，空前的创造精神与高度的严格精神是19世纪数学发展的主要特征。非欧几何的诞生、射影几何学的复兴、函数论的创立、分析学的严格化、近世代数的创始等，都是19世纪最典型的数学成就。到19世纪末，康托尔（G.Cantor，1845-1918）创立的集合论已成为现代数学的基础；逻辑的数学化促使数理逻辑这门学科诞生；皮亚诺（G.Peana，1858-1932）对算术及实数理论进行公理化推动了公理化运动，而公理化运动的最大成就是德国数学家希尔伯特（D.Hilbert，1862-1943）在1899年对于初等几何的公理化，公理化方法是现代数学的重要方法之一，对于数学基础和数理逻辑的研究也有影响；当时也是现代数学的一些新学科兴起的时期，如抽象代数学、点集拓扑学、代数拓扑学、实变函数论、泛函分析、测度与积分理论等，这些学科的发展一直与数学基础和数理逻辑的发展有着密切的关系。总之，到19世纪末，数学已经发展成为拥有众多分支的庞大学科，数学的研究越来越专门化。

20世纪的数学，继承了19世纪数学的优良传统，是数学从多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论。1900年在巴黎召开的国际数学家大会上，法国数学家彭加勒（H.Poincare，1854-1912）还兴奋地宣称“……借助集合论概念，我们可以建造整个数学大厦……今天我们可以说绝对的严格已经达到了……”①。然而，彭加勒的语音未落，数学基础的矛盾——悖论就接踵而至，“罗素悖论像一颗重磅炸弹，使人们从美梦中惊醒，引起了数学界的极大恐慌”②。这样，就在这个数学成果丰富多彩的19世纪末20世纪初，第三次数学危机发生了，动摇了集合论的数学基础地位。

2.1 集合论的创立

集合论是现代数学的重要基础理论，它的概念和方法现已渗透到数学的各个分支以及其它自然科学中，它的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响。

集合论诞生于1873年，其创立者是俄国人康托尔。他出生于圣彼得堡一个商人家庭，年轻时曾就读于苏黎世大学、格丁根大学、福兰克福大学以及柏林大学。康托尔一生的工作大致可以分为三个时期，“早期，他对数论和三角级数颇有研究，他在有理数的基础上建立了一个令人满意的无理数理论，引进一个新的数类——实数，并定义了实

① [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:95.

② 吴哲辉. 悖论思维与科学发展[J]. 山东科技大学学报, 2000,(3):24-29.

数的四则运算和两个实数的不等关系；之后，他创立了集合论；晚年，他较多地从事哲学和神学的研究”①。其中，创立集合论是康托尔对数学的最主要贡献，他处理了数学上最棘手的问题——无穷集合。

康托尔在 1874 年发表的论文《论所有实代数集合的一个性质》中证明了一个令人震惊的结论：②超越数比代数数要多得多。他的推论建立在以下两个命题的基础之上：实数集是不可数的；所有代数数的全体所构成的集是可数的。康托尔的这种证明是史无前例的。他实际上是证明了无穷之间也有差别，既存在可数的无穷，也存在像实数那样不可数的、具有“连续统的势”的无穷。因为在当时，数学家认为靠得住的只有有限，而无穷最多只是模模糊糊的一个记号∞，而康托尔则把无穷分成了许许多多的层次，还发现了实数集与有理数集是两个不同层次的无穷集。不同等级、不同层次的无穷集合的发现，使康托尔对无穷的认识大大地加深了。

1895 年和 1897 年，康托尔先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文，“其中最重要的是引进‘序型’的概念，并定义相应的序数”③，此时康托尔所能做的关于超限基数和超限序数的理论已臻于完善，康托尔创立的无穷集合论，为数学大厦的建立提供了新的基础，数学已发展成为一门庞大的学科。

集合论的成功标志着人类思维能力的一次巨大飞跃。正因为如此，康托尔也成为数学史上最富想象力，同时也是最有争议的一位数学家。希尔伯特称赞康托尔的超限数理论是“数学精神最令人惊羡的花朵，人类理智活动最美的成果。”④但是另一方面，集合论的内在矛盾也开始暴露出来。康托尔自己首先发现了集合论的内在矛盾。他在 1895 年的文章中遗留下两个悬而未决的问题：一个是连续统假说，另一个是所有超限基数的可比较性。他所提出的问题，一部分被他自己解决，一部分被他的后继者解决，一些尚未解决的问题则引导和支配着数学的某一发展方向。

2.2 数学公理化运动的开端

如前所述，19 世纪末及 20 世纪初，数学的发展蒸蒸日上，各学科体系都开始逐步建立，数学家们也开始探究一些基础的问题，例如什么是数？什么是曲线？什么是积分？什么是函数？……以及如何完善数学学科的体系。那么，经典的方法一共有两类。“一类是老的公理化的方法，只是由于非欧几何学的产生和发展，暴露出它的许多毛病；

---

① 张月华. 康托与集合论的创立[J]. 科技信息, 2008,(3):94.

② 所谓代数数，是指满足代数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$（方程中的系数是有理数）的实数根。根据这一定义，容易看到除有理数外，极其众多的无理数如 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{2}$ 等也都是代数数。实数中除了代数数之外，其他的被称为超越数。

③ 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都；四川人民出版社, 1985:50.

④ D.Hilbert.Über das Unendliche[J].Mathematische Annalen,1926,(95):161-190.

另一类是构造方法或生成方法，这个办法往往有局限性，许多问题的解决不能靠构造。尤其是涉及无穷的问题往往靠逻辑、靠反证法、甚至靠直观”①。然而，这些方法究竟能否被用来解决数学问题，只有对其加以必要的分析。

对于基础概念的分析研究产生了一系列新领域——抽象代数学、拓扑学、泛函分析、测度论、积分论；而在方法上的完善，则是新公理化方法的建立。德国数学家巴士（M.Pasch，1843-1930）、意大利数学家皮亚诺等曾分别提出各自的公理系统，但是这些公理系统都不够完美、具有一定的局限性。直到1899年，希尔伯特的《几何学基础》的出版，标志着数学公理化新时代的到来，极深刻地影响了之后数学的发展。

希尔伯特在1900年巴黎举行的国际数学家大会上还提出：“在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对于这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此所建立起来的公理，同时也是这些基本概念的定义”②。希尔伯特在他的著作《公理化思想》中再一次肯定了这个方法：“能够成为数学的思考对象的任何事物，在一个理论的建立一旦成熟时，就开始服从于公理化方法，从而进入了数学。通过突进到公理的更深层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力，并弄清楚我们的知识的统一性。特别是，得力于公理化方法，数学似乎就被请来在一切学问中起领导的作用”③

2.3 数理逻辑的兴起

数理逻辑又称符号逻辑、理论逻辑。它的研究内容是“两个演算加四论，具体为命题演算、谓词演算、集合论、模型论、递归论、证明论”④。数理逻辑是数学的一个分支，是用数学方法研究逻辑或形式逻辑的学科。所谓数学方法就是指数学上用的一般方法，包括使用符号和公式、已有的数学成果和方法，特别是使用形式的公理方法。用数学的方法研究逻辑的系统思想一般要追溯到德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646-1716），他首先提出了数理逻辑的思想，成为现代数理逻辑的先驱。1847年，英国数学家布尔（G.Boole，1815-1864）建立了“布尔代数”，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。19世纪末20世纪初，美国哲学家、数学家皮尔斯（C.S.Peirce，1839-1914）、德国数学家弗雷格（F.L.G.Frege，1848-1925）、意大利数学家皮亚诺等人使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。其中，皮尔斯引入

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:69.
② P. 希尔顿(Hilton). 今日数学和科学的教育：流行着的错误的“对分法”[C]//国际数学教育大会(ICME). 第三届国际数学教育会议论文集. 1976:33.
③ [美]M. 克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:100.
④ 石纯一, 王家廞. 数理逻辑与集合论[M]. 北京：清华大学出版社, 2000:1.

了逻辑符号，推进了命题演算，区别了命题与命题函数；弗雷格在他的《概念文字》中不仅完备地发展了命题演算，而且引进了量词概念以及实质蕴含的概念，他还给出一个一阶谓词演算的公理系统，这可以说是历史上第一个符号逻辑的公理系统。皮亚诺用符号语言对数学进行公理化，开始用符号的记法来重写算术，并且讨论了分数、实数、甚至极限和点集论中的概念。其后，在德国数学家希尔伯特、奥地利数学家哥德尔（K.Gödel，1906-1978）等人的推动下，数理逻辑得到了进一步发展。

2.4 悖论的产生

由前面的内容可知，在 20 世纪初，数学取得了蓬勃的发展，产生了许多新的分支学科，形成了稳固的数学大厦，康托尔的集合论已逐步成为数学基础的核心。然而，当集合论成为数学的基础之后，随着人类对无穷集合认识的不断深入，又产生了许多“悖论”。

1897 年意大利数学家布拉里——福蒂（Burali forti，1861-1931）在超穷序数理论中发现了第一个悖论；随后，集合论的创始人康托尔于 1899 年在基数理论中又发现了另一个悖论；到 1902 年罗素（Russell，1872-1970）在集合论概括原则的基础上又引出著名的“罗素悖论”，是当时关于数学基础的最具震撼力的悖论。这样，由于这一连串悖论的出现，使得许多科学家、数学家忧心忡忡。于是，不少数学家认为集合论靠不住，自然数的算术也不一定可靠，整个数学大厦动摇了，引发了数学史上的第三次危机。

2.4.1 布拉里——福蒂最大序数悖论

“所有序数的序列是良序的，它具有的序数应是所有序数的最大者。”①这个悖论是说，序数按照它们的自然顺序形成一个良序集 A，而根据定义集合 A 也有一个序数 B，并且 B 包含于 A。由序数的定义，序数序列中任何一段的序数要大于这段之内的任何序数，因此 B 应该比任何序数都大，从而又不属于 A。这是布拉里——福蒂于 1897 年 3 月 28 日在巴洛摩数学会上提出的，是头一个发表的近代悖论，它引起了数学界的兴趣，并导致了以后许多年的热烈讨论。

2.4.2 康托尔最大基数悖论

布拉里——福蒂的悖论揭示了康托尔集合论的矛盾。其实，康托尔本人在这之前已经意识到集合论的内在矛盾。他在 1899 年 7 月 28 日给戴德金的信中“问到所有的基数全体本身是否构成一个集合，因为如果是集合，它就会有大于任何其他基数的基数”②指

① [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:71.
② [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:71.

出，不能谈论“由一切集合构成的集合”，否则就会陷入矛盾。实际上这就是罗素悖论的内容。

康托尔的根据就是他的最大基数悖论，“康托尔把一个集合 Y 的基数定义为与 Y 能够一一对应的集合 X 的全体，用 $|Y|$ 表示。我们定义 $|Y| \leqslant |Z|$ 为 Y 与 Z 的一个子集合一一对应。如果 $|Y| \leq |Z|$，且 $|Y| \neq |Z|$，则用 $|Y| < |Z|$ 表示。康托尔证明，如果 P(Y)是 Y 的所有子集构成的集合，即 Y 的幂集，则 $|Y| < |P(Y)|$。设 C 是所有集合的集合，因此 P(C)也是 C 的子集合，所以 $|P(C)| \leq |C|$；但是，由康托尔定理，$|C| < |P(C)|$，这就导致矛盾。”①

2.4.3 罗素悖论

尽管 1897 年布拉里——福蒂在超穷序数里发现了悖论，1899 年康托尔在基数理论中也发现了悖论，但是这两个悖论并没有引起数学家和逻辑学家们的足够重视。

然而，“罗素悖论”的发现，如一颗巨石在数学平静的水面激起了惊涛骇浪，使整个数学界为之震惊。19 世纪的德国数学家、逻辑学家弗雷格，曾根据康托尔集合论的思想，准备把算术的基础归结为逻辑，但是在 1903 年，他即将出版《算术的基本法则》第二卷时，接到罗素的一封信，罗素把集合论的悖论告诉了他。罗素悖论的出现给他泼了一盆冷水，弗雷格在本书的结尾处 253 页写道：“一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成的时候它的基础垮掉了。当这部著作只等复印的时候，罗素先生的一封信就使我处于这种境地。”②

“罗素悖论”的内容是这样的：设集合 B 是一切不以自身为元素的集合所组成的集合，问：B 是否属于 B？我们说，若 B 属于 B，则 B 是 B 的元素，于是 B 不属于自身，即 B 不属于 B；反之，若 B 不属于 B，则 B 不是 B 的元素，于是 B 属于自己，即 B 属于 B。这样，无论如何结果都是矛盾的。

1918 年，罗素在此基础上又提出一种通俗形式的悖论，即“理发师悖论”。这个悖论是这样的：“某村有一个手艺高超的理发师，他只给村里一切不给自己刮脸的人刮脸。那么，他给不给自己刮脸呢？如果他不给自己刮脸，他是个不给自己刮脸的人，他应当给自己刮脸。如果他给自己刮脸，由于他只给不给自己刮脸的人刮脸，他就不应当给自己刮脸”③。因此，不刮，该刮，该刮，不该刮……这样，这位理发师陷入了逻辑矛盾之中，一会儿拿起刮脸刀，一会又放下，处于无所适从的状态……

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社，1985:87.
② ［美］M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社，1979:301.
③ 张景中. 数学与哲学[M]. 大连：大连理工大学出版社，2008:62.

“罗素悖论”实质上与“理发师悖论”意义相近，但它涉及的是最基本的集合论概念，如“元素”、“属于”、“集合”，是数学中几乎天天都要碰到的概念。它“剥去了从康托尔的集合论所导致的悖论的一切数学上的技术性细节，从而揭示了一个惊人的事实，即我们的逻辑直觉(有关真理、概念、存在、类等概念的直觉)是自相矛盾的”[①]。因此，它震撼了整个数学界，本应作为全部数学之基础的集合论产生了严重的危机。由于“罗素悖论”的提出，引起了数学界和哲学界的极大重视。从此开始加大悖论问题研究的力度，接着又发现了一系列悖论。比如：1905年理查德（J·Richard，1862-1956）提出了“能用有限字母表示的不能用有限字母表示的数的悖论”（简称“理查德悖论”）[②]；1908年克特·格雷林（Kurt·Grelling，1886-1941）提出了“非自状形容词悖论”（又称“格雷林悖论”）[③]，形成了悖论发展史上的黄金时期。而这一黄金时期高峰的标志就是“罗素悖论”。由此看来，“罗素悖论”不仅使数学陷入“第三次危机”，同时也使悖论发展到了鼎盛时期，这是悖论思维张力的效应所起的作用。也就是说，悖论在给人们带来尴尬的同时也赋予了无限的启迪。人们很快发现悖论的根源就是康托尔在提出集合论时，对“集合”的概念没有做必要的限制，以至于可以构造“由一切集合构成的集合”这种过大的集合，产生了悖论，动摇了数学的基础，导致了第三次数学危机。

① 张建军. 科学的难题——悖论[M]. 杭州：浙江科学技术出版社, 1990:97.
② 王雨田. 现代逻辑科学导引[M]. 北京：中国人民大学出版社, 1987:671.
③ 王雨田. 现代逻辑科学导引[M]. 北京：中国人民大学出版社, 1987:671.

第三章　第三次数学危机的解决途径

集合论悖论引起第三次数学危机之后，针对“悖论的根源在哪里”、“如何解决这些悖论”的问题，数学家、逻辑学家和哲学们作出了巨大的努力。德国数学家策梅罗（Zermelo，1871-1953）认为，适当的公理体系可以限制集合的概念，从逻辑上保证集合的纯粹性。他首次提出了集合论公理系统，经弗兰克尔（Fraenkel，1891-1965）、冯·诺伊曼（John von Neumann，1903-1957）等人的补充形成了一个相对完整的集合论公理体系（ZFC 系统），矛盾得到了回避，从而消除了罗素悖论产生的条件。与此同时，以罗素为代表的逻辑主义、以布劳威尔为代表的直觉主义、以希尔伯特为代表的形式主义三大学派应运而生。一场大论战把数学推向了一个新的阶段。在这期间，数学家和哲学家们纷纷提出了自己的见解，无形之中卷入了一场关于数学基础问题的大辩论之中。直到 1930 年，哥德尔不完全性定理的证明揭示了各派的弱点，这场争论才逐渐暗淡下去。不过，三大学派的论争对当时乃至以后的数学和数学哲学的发展产生了深远的影响。

3.1 策梅罗的公理化集合论对悖论的应对

1908 年，策梅罗采用公理化集合论的方法来消除罗素悖论。他在其重要论文《关于集合论基础的研究》中是这样评述的：“集合论是这样一个数学分支，它的任务就是从数学上以最为简单的方式来研究数、序和函数等基本概念，并借此建立整个算术和分析的逻辑基础；因此构成了数学科学的必不可少的组成部分。但是在当前，这门学科的存在本身似乎受到某种矛盾或者悖论的威胁，而这些矛盾和悖论似乎是从它的根本原理导出来的。而且一直到现在，还没有找到适当的解决办法。面对着罗素关于‘所有不包含以自己为元素的集合的集合’的悖论，事实上，它今天似乎不能再容许任何逻辑上可以定义的概念‘集合’或‘类’为其外延。康托尔原来把集合定义为我们直觉或者我们思考的确定的不同的对象做为一个总体。肯定要求加上某种限制，虽然到现在为止还没有成功地用另外同样简单的定义代替它，而不引起任何疑虑。在这种情况下，我们没有别的办法，而只能尝试反其道而行之。也就是从历史上存在的集合论出发，来得出一些原理，而这些原理是作为这门数学学科的基础所要求的。这个问题必须这样地解决，使得这些原理足够地狭窄，足以排除掉所有的矛盾。同时，又要足够地宽广，能够保留这个理论所有有价值的东西。”[①]

策梅罗前面的话对当时集合论的处境做了简要回顾，而最后一句则表明了他在处理悖论时的基本立场。实际上，策梅罗是要把集合论变成一个完全抽象的公理化理论，他

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:97.

始终对集合的概念不予定义，而将其性质完全由公理反映出来。他不谈论“什么是集合”的问题，而只讲在数学中如何来处理和运用它们，同时他还引入了一些重要公理，如决定性公理、初等集合公理（空集公理、单元素公理、对集公理）、分离公理、幂集公理、并集公理、选择公理、无穷公理，构成策梅罗的公理系统 Z。

策梅罗首次提出的集合论公理系统 Z，其意义是相当重大的：首先，这个公理系统实质上是在尽量地限制集合的范围，使之不要太大，这样就回避了如“所有对象”、“一切”等的说法，从而消除了罗素悖论产生的条件；其次，这些公理既保存了康托尔集合论中概括原则的合理部分，又剔除了由概括原则所引出悖论的不合理部分，这样，只要对公理适当地加以选择，就可以做到既使新建立的集合论能成为整个数学的基础，同时又确保新的理论不会导致悖论；同时，由于这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托尔集合论的缺陷，把原本直观的集合概念建立在严格的公理基础之上，并避免了悖论的出现，从而使集合论发展到公理化集合论阶段。

策梅罗的公理系统发表之后，许多人对其公理集合论提出过一些改进意见。例如，弗兰克尔和斯克朗（Skolem,1887-1963）曾指出了上述公理中命题函数的“确定性”是不严谨的，分离公理不能保证把那些有意义的合理的集合都刻画出来，这样策梅罗的公理系统就因太狭窄而不足以满足对集合论的合法需要。为了弥补这个缺陷，弗兰克尔又加进了一个公理组即替换公理；另外，弗兰克尔还把公理以符号逻辑表示出来，形成了现在通用的 ZF 系统。

经过弗兰克尔改进的策梅罗集合论公理系统，再加上选择公理 AC，一般被认为是足够数学发展所需的，但是还需要加一条限制性的公理，即除了满足这些公理的集合之外没有其他的集合。为了排除这种集合，冯·诺依曼引进公理 9（基础公理），他一方面提出自己的公理化体系，另一方面又详细地证明了怎样由他的公理系统导出集合论，冯·诺依曼的处理方法是对策梅罗公理化的推广。他认为，导致矛盾并非由于承认了类，而是由于把它们当作别的类的元素。于是提出避免悖论的方法。他避免悖论的方法是这样的：“承认有两种类型的类即集合和固有类，集合可以是其他类的成员，而固有类则不容许是其他类的成员……在这个公理系统中，我们就有三个原始概念：集合，类，属于关系……”[①]这样，他就把类（class）与集合（set）做了区别：类是大到不能包含在别的集合或类中的集合，而集合是限于可作为类的元素的类。这样，集合就是安全的类。

在策梅罗——弗兰克尔系统中，是通过限制集合产生的方式来达到这个目的的，他

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社，1985:197.

们把集合只限制在对于数学必不可少的那些集合上。但是从冯·诺依曼看来，这样施加限制有点不必要地过分严格，使得数学家在论证过程中失掉一些有时有用的论证方式，而这些论证方式似乎是没有恶性循环的。于是冯·诺依曼采取一个比策梅罗——弗兰克尔更大胆的想法，而同时却消除任何产生悖论的危险。

综上所述，“策梅罗的形式集合论，经过弗兰克尔、冯·诺伊曼和他人的修改，对于开展可以说是全部经典分析所需要的集合论是适当的，而悖论也避免到这种程度，即至今在这个理论之内还未发现。然而，公理集合论的相容性尚未证明。关于这个未解决的相容性问题，彭加勒评论是：‘为了防备狼，羊群已用篱笆圈起来了，但却不知道在圈内有没有狼’。”①

3.2 关于现代数学基础的大论战

3.2.1 以罗素为主要代表的逻辑主义学派

在历史上，数学和逻辑是两门完全不同的学科：数学与科学有关，逻辑与希腊文有关。以至“数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心。数学和逻辑是精确科学的两只眼睛：数学派闭上逻辑眼睛，逻辑派闭上数学眼睛，各自相信一只眼睛能比两只看得更好。”② “但是二者在近代都有很大的发展：逻辑更数学化，数学更逻辑化，结果在二者之间完全不能划出一条界线；事实上二者也确定一门学科。它们的不同就象儿童与成人的不同：逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代。……许多现代的数学研究显然是在逻辑的边缘上，许多现代的逻辑研究是符号的、形式的，以致对于每一个受过训练的研究者来说，逻辑和数学的非常密切的关系极其明显。”③这句话明确地反映了罗素的数理哲学观点——逻辑主义：把数学等同于逻辑，或者说数学是逻辑的延伸。

罗素在 1903 年出版的《数学的原理》中说，“纯粹数学是形如‘p 蕴含 q’的所有命题类，其中 p 和 q 都包含数目相同的一个或多个变元的命题，且 p 和 q 除了逻辑常项之外，不包含任何常项……除此之外，数学使用一个不是它所考虑的命题组成部分的概念，即真假的概念。”④这种看法是罗素本人最早发表的关于逻辑主义的论点。

罗素认为，他的逻辑主义论点中有许多并不只是来自他本人，戴德金（Dedekind，1831-1916）、皮亚诺、怀特海（A.N.Whitehead，1861-1947）等人也曾以不同形式表述过，只是在当时逻辑主义观点受到严重批判，罗素本人却一直坚持做这方面的研究。实

① [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:294.
② [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:289.
③ [英]罗素. 数理哲学导论[M]. 晏成书译. 北京：商务印书馆, 1982:182.
④ 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:168.

际上，弗雷格也曾明确表示过一些逻辑主义观点“每个数是一个独立的对象，算术规则是分析判断，因此是先验的……算术只是逻辑进一步发展的形式，每个算术定理是一个逻辑规律，但是是导出的规律。把算术应用到自然现象上的解释只是对所观察到的事实的逻辑加工，计算就是推理。数字规律无须实践检验即可应用于外在世界。而在外在世界、空间总体及其内容物，并没有概念，没有数，因此，数字规律实际上不能应用于外在世界，这些规律并不是自然规律。不过它们可以应用于对外在世界中的事物为真的判断上，这些判断即自然规律。它们反映的不是自然现象之间的关系，而是关于自然现象的判断之间的关系。”①

以罗素为代表的逻辑主义学派认为，数学是由逻辑派生出来的，是先验地从逻辑公理系统中演绎出来的，是逻辑的产物，与经验事实无关，否定数学是不依赖于人类思维的客观实在，从而具有唯心主义的观点；他们还认为，数学研究的对象是形式结构，数学只有形式而无内容。总之，逻辑主义的哲学观点是先有逻辑再有数学，数学建立在逻辑基础之上，即“逻辑主义的理论是数学能归纳为逻辑，据此，数学无非是逻辑的一部分。”②

逻辑主义的观点遭到了很多批评，因为如果数学只是一套逻辑演绎系统，那么它怎么可能反映广泛的自然现象呢？它又怎样能够具有创造力呢？它又怎样能产生新概念呢？尤其是“罗素悖论”的出现，这一学派遭到的攻击更大。彭加勒曾挖苦他们，“逻辑主义的理论倒不是不毛之地，什么也不生长，它滋长矛盾，这就更加让人受不了。”③韦尔（Wegl，1885-1955）也攻击说，这个复杂的结构“对我们信仰力量的压制，不下于早期教会神父和中世纪经院哲学家的教条。”④

对逻辑主义致命打击的是哥德尔的不完全性定理，它证明了从一个逻辑公理系统中演绎出整个数学是不可能的，因而哥德尔不完全性定理宣告了“把数学全部归结为逻辑”的彻底失败。但是罗素等人的贡献还是不可磨灭的，他们为现代数学奠定了逻辑基础，导致了公理化集合论的蓬勃发展，其中符号逻辑的公理化，揭示了数学与逻辑之间的关系。特别是它以完全符号的形式实现了逻辑的彻底的公理化，从而极大地推进了数理逻辑的发展。这对后来计算机的研制和人工智能的研究都具有巨大的现实意义。而罗素和怀特海的《数学原理》成为一部数学逻辑的经典，至今还有一定的意义。

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:169.
② [美]保罗·贝纳塞拉夫等. 数学哲学[M]. 朱水林等译. 北京：商务印书馆, 2003:47,61,236.
③ 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:172.
④ [美]M.克莱因. 古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:307.

3.2.2 以布劳威尔为主要代表的直觉主义学派

直觉主义的哲学思想最早来源是康德（Immanuel·Kant，1724-1804）的先验主义，它特别强调人的直觉对数学概念的作用，康德认为人的数学直觉分为时间和空间两个方面。现代直觉主义的真正奠基人则是荷兰数学家布劳威尔（L.E.J.Brouwer，1881-1966）。布劳威尔认为，“基本的直观是按时间顺序出现的感觉……他把数学思维理解为一种构造性的程序，它建造自己的世界，与我们经验的世界无关，有点象是自由设计，只受到应以基本数学直观为基础的限制。”[①]。因此，以布劳威尔为主要代表的直觉主义学派主张一种“构造性数学”，直觉主义者也被称为构造主义者，当今他们所提倡的这种构造性数学已成为数学体系中的一个尤为重要的分支，并且与计算机科学的诸多领域密切相关。然而，直觉主义的缺陷是严格限制使用排中律，这样就使得古典数学中的那些大量受数学家珍视的东西成为了牺牲品。

布劳威尔坚持认为，“数学直觉具有无可争辩的可信性、可靠性，因而数学只要根基于其上，便可避免悖论的产生”。[②] “数学的基础只可能建立在这个构造性的程序上，它必须细心地注意有哪些论点是直观所容许的，哪些不是……数学概念嵌入人们的头脑是先于语言、逻辑和经验的。决定概念的正确性和可接受性的，是直观，而不是经验和逻辑。”[③]因此，直觉主义者“不满足于对已有数学的某些部分作一些限制性的限制和修改，而是要依据‘可靠性’标准对已有数学进行彻底的审查和改造”[④]这些观点都充分暴露了他唯心主义和神秘主义的思想倾向。

由此看来，直觉主义学派的主要哲学观点是把数学看成是人类心智固有的一种创造活动，是人脑的一种自由的、生机勃勃的思维活动所带来的产物。直觉主义数学家“建议把数学工作作为他的智力的一种自然功能，作为思想的一种自由的有生气的活动。在他看来，数学是人类精神的产物。他运用语言，不论是自然的或形式化的，只是为了交流思想，也就是使别人或自己能懂得他自己的数学想法。这个语言伴随物不是数学的代表，更不是数学本身。”[⑤]直觉主义者主张数学的对象及真理不能脱离直觉而独立存在，数学理论的真伪只能通过人的直觉来判断；他们甚至认为“实无穷是产生悖论的根源，必须在数学中彻底地排斥产生悖论的根源。”[⑥]。现代直觉主义还坚持认为“概念性思维

① [美]M.克莱因.古今数学思想(第四册)[M].北京大学数学系数学史翻译组译.上海:上海科学技术出版社,1979:311.

② 张莉敏.悖论与数理逻辑的发展探析[D].开封:河南大学,2003:5.

③ [美]M.克莱因.古今数学思想(第四册)[M].北京大学数学系数学史翻译组译.上海:上海科学技术出版社,1979:311.

④ 夏基松,郑毓信.西方数学哲学[M].北京:人民出版社,1986:66-68.

⑤ [美]保罗・贝纳赛拉夫等.数学哲学[M].朱水林等译.北京:商务印书馆,2003:47,61,236.

⑥ 张家龙.评数学基础中的直觉主义学派[J].自然辩证法研究,1992,(4):3.

不是数学本身的一个部分，不能给数学带来任何有益的贡献，在直觉中是找不到概念思维的，概念只不过是理性对创造的性质加以隔离而产生的纯消极产物”[①]。

直觉主义学派主张反对把排中律运用于无穷集合。排中律在历史上被认为是一条独立的、先验的原则，它起源于推理在有穷集合中的应用，是一种重要的间接证明方法；它肯定任何一句有意义的话非真即假。但是布劳威尔认为，对于有穷集合可以采用逐个排查的方法来断定其中的元素是否都具有某种性质，但是对于无穷集合是无论如何都办不到的，而只可能证明存在某个元素符合这个性质而不能证明出所有元素都符合。这样，对排中律的否认产生了不可断定的命题，即直觉主义者主张存在第三种情况：有既可证明、又不可证明的命题。

起初，直觉主义的观点并不为大家所接受，大数学家希尔伯特曾指出：“不准数学家使用排中律，就和不准天文学家使用望远镜，不准拳师用拳头一样。”[②]这话其实没有击准布劳威尔的要害。后来许多数学家都认为能够“构造”出数学对象而不是纯粹地说它的存在是有益的。甚至对于纯存在性的定理，例如欧几里德关于存在无限多个质数的证明，由于没有指出第 n 个质数如何确定的一般方法，也不能算是好的证明，至少是不完善的。现在，大多数数学家都认为构造性观点是很对的，很重要的。后来希尔伯特也吸收了布劳威尔的长处，坚持有穷性观点最可靠，这才是直觉主义观点的精髓。

哥德尔在 1931 年证明的不完全性定理，确确实实使人们认识到排中律没有先验的绝对的正确性。直觉主义者认为先数学而后逻辑，逻辑只不过是数学的一个分支和论证手段，“数学中最重要的进展都不是由于要把逻辑形式完美化而得到的，而是由于基本理论本身的变革。是逻辑依靠数学，而不是数学依靠逻辑。”[③]；直觉主义者同逻辑主义者一样，也不承认数学研究的对象来源于客观实际，因此他们的观点也是唯心主义。

3.2.3 以希尔伯特为代表的形式主义学派

希尔伯特，是 20 世纪最伟大的数学家，他通晓数学的各个分支学科，在数学的几乎所有领域中都作出了不可磨灭的贡献。希尔伯特前期的主要贡献是不变式理论、代数数论、分析学和物理学，晚年转向数学基础问题的研究，并成为形式主义学派的代表人物。

以希尔伯特为代表的形式主义学派的主要观点是，数学的对象就是符号本身，符号就是本质，它们并不代表理想的物理对象。这是形式主义与逻辑主义的重要区别。由于

① 张其亮. 数学基础问题的哲学观及其启示[J]. 高等理科教育, 2008,(3):21.
② [德]赫尔曼·韦尔. 大卫·希尔伯特及其数学工作[C]. 数学史译文集. 上海:上海科学技术出版社, 1981:53.
③ [美]M.克莱因. 古今数学思想(第四册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海:上海科学技术出版社, 1979:213.

数学只讨论符号的表达式，希尔伯特还把排中律保留了下来。

形式主义纲领的首要任务是对任何形式系统确立其相容性。希尔伯特曾提出了一套直接证明形式系统相容性的设想，这套设想被称之为“证明论”或“元数学”，它是形式主义纲领的核心。数学证明的程序是这样的：将数学彻底形式化为一个系统，在这个形式系统中，通过逻辑的方法来进行数学语句的公式表述，并用形式的程序表示推理、确定一个公式；确定这个公式蕴含着另一个公式；再确定这第二个公式。依此类推，所确定的公式和蕴含关系都是前面的公理或结论，数学证明便由这样一条公式链构成。这样，对于形式主义者来说，数学本身就是一系列的符号组成的形式系统，系统中的每一部分有各自的逻辑、概念和推导演绎法则，把这些综合起来便构成了整个数学的内容。

希尔伯特和他的学派，确定证明了一些简单形式系统的无矛盾性，并且他们相信他们就将实现证明算术和集合论的无矛盾性这个目标了。1926年，他在《论无限》一文中这样写到：“在几何学和物理理论中，无矛盾性的证明是通过把它化归到算术的无矛盾性来完成的。这个方法明显地不能用于对算术本身的证明。因为我们的证明论……使得这最后一步成为可能，它就构成数学结构的不可缺少的基石。而尤其值得注意的是，我们已经受过两次事件——首先是在微积分的悖论中，后来是在集合论的悖论中——在数学的领域中不会再发生了。”①

然而，1931年由奥地利数学家哥德尔证明的一条重要定理揭示了形式主义方法的内在局限性，其清晰明了地指出形式系统的相容性在本系统内是无法证明的，从而使希尔伯特纲领受到了巨大的打击。这就是著名的“哥德尔不完全性定理”。我们说，希尔伯特的形式主义计划虽然没能全部实现，但是，他所创立的元数学理论已成为人类数学领域的瑰宝。证明论这种新兴数学分支的诞生，也使数学研究达到了一个新的高度。同时，希尔伯特的公理化思想对现代数学和物理学的许多分支学科的发展也产生了广泛而深刻的影响。

总之，策梅罗的公理化集合论以及关于数学基础的三大学派论战，都未能对数学基础问题作出完全令人满意的解答，没有得出明确的结论。但是，在解决第三次数学危机的过程中，他们各自发展了一套精致而深刻的理论，推动了数学的进一步发展，将人们对数学基础的认识引向了空前的高度。三大学派在数学基础问题上积累的成果都被纳入数理逻辑研究的范畴而极大地推动了现代数理逻辑的形成与发展，并产生了一批现代数学。同时，哥德尔的不完全性定理对各学派的批判与论争，在一定程度上解决了一些问

① [美]M.克莱因. 古今数学思想(第四册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:319.

题。自此之后，数学基础的危机不那么突出了，而数理逻辑形成了一个高度发展的独立学科，成为一门具有自己独立技术和方法的数学分支。现在的数理逻辑，不管是公理集合论、模型论还是证明论、递归论都已经变得十分专门化。

从哲学上讲，“无限性本身就是矛盾”，这个概念即使对于希腊人也已经在无理数上造成了问题，而且他们在穷竭法中躲开了它。因此，亚里士多德说：“否认无限吧，有许多地方显得说不通。承认无限吧，还得回答下列问题：它是作为实体呢，还是作为某一事物故有的属性呢？抑或两者皆否呢？”[①]从此以后，“无限性”的概念成为一直争论的话题，韦尔曾说过，数学是无限的科学。“关于数学最终基础和最终意义的问题还是没有解决；我们不知道向哪里去找它的最后解答，或者根本不能期望会有一个最后的客观回答。‘数学化’（Mathematizing）很可能是人的一种创造性活动，象语言或音乐一样，具有原始的独创性，它的历史性决定不容许完全的客观的有理化（Rationalization）。”[②]

① [古希腊]亚里士多德. 物理学[M]. 张竹明译. 北京：商务印书馆, 1982:78.

② H.Weyl.Hermann Obituary:David Hilbert.1862-1943[J].Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London,1944,(4):547-553.

第四章　第三次数学危机对现代科学发展的影响

第三次数学危机，产生了关于数学基础的三大学派论争，促进了数学基础的研究，使数理逻辑得到了充分的发展，刺激了数学及其相关学科的发展，同时对整个科学的发展也起了巨大的推动作用，带来了现代科学发展的黄金时代。

4.1 第三次数学危机是现代数理逻辑发展的驱动力

现代数理逻辑从内容到方法，主要是在第三次数学危机发生后关于数学基础的热烈争论中发展起来的，现代数理逻辑的四大分支——公理化集合论、证明论、递归论和模型论都源于 20 世纪早期关于数学基础问题的探讨。数理逻辑的发展，为纯粹数学和应用数学的发展都提供了重要的思想和方法。

1908年，策梅罗提出公理化集合论，后来经过弗兰克尔和斯科朗的严格解释和少许改进，成为现在的两个最著名的公理集合论系统中的一个，即ZF公理体系。这样，原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现，这实际上是集合论发展的第二个阶段，而与此相对应的是朴素集合论，即在1908年以前由康托尔创立的集合论。公理化集合论，一方面保留了朴素集合论中有价值的成果，另一方面“把集合限制得使之不要太大……回避了比如说所有‘对象’，所有序数等等……消除了罗素悖论产生的条件”[①]，从而较圆满地解决了第三次数学危机。与此同时，在集合论公理化体系的不断改进过程中，随着选择公理（AC）和连续统假设（CH）的研究和应用，大大推进了集合论的发展，使之最终成为20世纪最活跃、最重要的学科之一。

事实上，集合论在现代数学的发展中起了不可磨灭的作用，是现代数学各个分支的基础，是现代数学的统一者和简化者。因为，我们认为几乎所有的数学分支都是研究某类东西的集合，例如几何学就是研究点的集合，代数则是研究数的集合及运算，数学分析主要涉及各种函数，而函数也是一种特殊类型的集合。我们说，集合论中悖论的出现促进了数学基础领域的发展。因为集合的语言和性质被广泛应用于数学的各个不同分支，它不仅成为现代数学的重要基础，而且作为离散结构的描述工具被广泛应用于计算机科学、信息科学、系统科学、人工智能、运筹学、经济学、语言学和心理学等方面。目前，集合已渗透到现实世界的各个领域，有着广泛的应用。这一领域还有大量未解决的问题，而且还在不断地提出新的课题，这正是它充满活力的表现。著名的连续统假设是100年来尚未解决的重大难题，选择公理的研究也为许多数学家所关注。集合论随着它的不断发展与应用，一定会形成更为博大精深的体系。

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都:四川人民出版社, 1985:100.

1930年以后，数理逻辑开始成为一个专门学科，得到了蓬勃的发展。由于哥德尔“两个定理”的证明，希尔伯特的“要找到一个有限的证明步骤来证明算术的无矛盾性”[①]的有限主义纲领行不通，从而新的证明论转向用非有限的超穷步骤。1935年，甘岑用超穷归纳法证明自然数算术形式系统的无矛盾性，其后又给出了其他的证明，这种放宽有限主义限制的方法，在第二次世界大战之后发展成为证明论的分支，并且这些证明也逐步推广到分支类型论及其他理论，同时证明逐步形式化和标准化。尤其是“在当前的数学实践中，数学知识是通过在定义和公理的基础上证明定理来获得的”[②]由此看来，证明论的方法对于数理逻辑本身有很大的推动作用，特别是得出新的不可判定命题，开辟了证明论发展的新方向。

1934年，哥德尔引进了递归函数，使之发展成为递归论的新分支，开始研究判定问题。实际上，递归的通俗意义就是由前面的结果可以推出后面的结果。例如，我们考虑自然数集合N到自然数集合N的函数，那么递归函数f(n)可以定义为：

$$\begin{cases} f(0)=a; \\ f(n')=\mathrm{b}(\mathrm{n},\mathrm{f}(\mathrm{n})) \end{cases}$$

其中，b(x,y)是固定的二元函数，a是固定的数，n′表示n的后继，对自然数来讲，就是n+1，这样已知f(0)，可得f(1)，从而可得f(2)，f(3)……以此类推，都可以一步一步地具体算出。经过类似的代换和递归的函数称为原始递归函数。哥德尔等人引进的是一般递归函数，这些函数都可以由原始递归函数而得到。递归论主要研究可计算性的理论，它和计算机的发展和应用有密切的联系。1946年，人类制成第一台电子数字计算机ENIAC，这样，算法的概念也在1947年被首次提出，从而判定问题也逐渐从我们直观的概念上升为精确的数学概念，立即在数学基础乃至整个数学中产生了巨大的影响。这时，一些不可判定命题的出现，标志着在数学历史上人们第一次认识到，有一些问题不可能找到算法解。在过去，人们一直模模糊糊地觉得，任何一个精确表述的数学问题，总是可以通过有限步骤来判定它是否正确，是否有解。找到不可判定问题再一次说明用有限过程对付无穷的局限性，它从另外一个角度反映了数学的内在固有矛盾。

20 世纪 50 年代应运而生的模型论，也与数学有着密切的联系，并逐步产生积极的作用。早在 30 年代，模型论应运于量词的消去，由此得到了整数加法群的判定步骤，塔尔斯基（Tarski，1902-1983）得到实数的可定义集和实数域的判定步骤。模型论给数学带来许多新的结果，大致可以分为三个部分：“在代数学方面的应用，主要在群论和

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社, 1985:127.

② Danielle Macbeth.The Problem of Mathematical Truth[J].Studies in Logic,2009,(2):1.

域论方面；在分析方面的应用，主要是非标准分析；在拓扑学、代数几何学方面的应用，主要是拓扑斯理论"①

总之，从形式上看，第三次数学危机似乎是使数学走进了"死胡同"，但实质上是"危机"把数学从"死胡同"里拯救了出来。我们说，第三次数学危机促进了数理逻辑的发展，促进了数学和计算机的研究，从而影响着现代电子计算机的研制与应用，新的思想、新的数学分支又象雨后春笋般地不断涌现，在此基础上，与之相互渗透、相互关联的计算机科学、控制理论与自动化科学、系统科学、人工智能也相应得到了发展。因此，我们说，"危机"使数学交上了"好运"，给数学和现实世界带来了无限生机。

4.2 第三次数学危机是现代数学及其分支学科发展的向导

4.2.1 模糊集合论的出现导致模糊数学的诞生

如前所述，康托尔集合论的创造性成果为数学提供了广泛的理论基础，而一系列悖论尤其是罗素悖论的出现，表明用康托尔的概括方法来定义集合时不能畅通无阻，从而动摇了整个现代数学的基础，引发了所谓的第三次数学危机。为了消除上述矛盾现象，科学家们进行了长期的、广泛的研究和讨论，最后提出了所谓的公理集合论，来对康托尔集合论中集合的概括方法加以限制，重新建立起作为数学各分支基础的基数、序数理论和集合运算等概念，并且在此基础上创立了模糊集合论。由此，模糊数学这一新的数学分支也于 1965 年应运而生。当时，美国控制论学者扎德（Zadeh，1921-）发表了他的重要论文《模糊集合》，标志着模糊数学作为数学中的一个新的学科分支诞生了。模糊数学的产生与发展具有广泛、深远的意义。

事实上，模糊数学是研究和处理模糊性、不确定性现象的数学理论和方法，它的发展主流是在应用方面。人们用模糊数学的方法进行判断、评价、推理、规划、决策和控制等，并发展起模糊聚类分析、模糊综合评判、模糊模型识别、模糊规划、模糊决策、模糊控制等方法。这些理论和方法一般被应用于经济管理、环境科学、安全与劳动保护等领域，如房地价格、期货交易、股市情报、资产评估、工程质量分析、产品质量管理、可行性研究、环境质量评价、资源综合评价、各种危险性预测与评价、灾害探测等均成功地应用了模糊数学的原理和方法。然而，医学、心理学、生物学、农业、文化教育、语言学等过去看似与数学无缘的学科也开始应用模糊数学的原理和方法，如计算机模糊综合诊断、传染病控制与评估、人体心理及生理特点分析、家禽孵养、农作物品种选择与种植、教学质量评估、语言词义查找、翻译辨识等均有应用模糊数学的实践，并取得

① 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都：四川人民出版社，1985:151.

了很好的效果。

模糊数学最重要的应用则是在计算机智能方面，不少人认为它与新一代电子计算机的研制有密切的联系。一般来说，人脑与计算机相比，具有处理模糊信息的能力，善于判断和处理模糊现象。但计算机对模糊现象识别能力较差，为了提高计算机识别模糊现象的能力，就需要把人们常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序，以便机器能像人脑那样简洁灵活的做出相应的判断，从而提高自动识别和控制模糊现象的效率。同时，我们研究人类系统的行为，或者处理可与人类系统行为相比拟的复杂系统，如航天系统、人脑系统、社会系统等，参数和变量甚多，各种因素相互交错，系统很复杂，它的模糊性也很明显。因而，就需要寻找一种描述和加工模糊信息的数学工具，这就推动数学家深入研究模糊数学。

这样，各门学科，尤其是人文、社会学科及其它“软科学”的数学化、定量化趋向把模糊性的数学问题推向中心地位。由此可见，模糊数学显示了强大的生命力和渗透力，使数学的应用范围大大扩展了。

4.2.2 无穷小重返数坛——非标准分析的诞生

由第一章的内容可知，17 世纪下半叶，牛顿、莱布尼兹在无穷小量概念的基础上创立了微积分学，因对无穷小量的解释含糊不清，出现了贝克莱悖论，导致了数学史上的第二次数学危机。19 世纪，柯西、维尔斯特拉斯等人引入极限论、实数论，使微积分理论严格化，从而避免了贝克莱悖论，圆满解决了第二次数学危机。与此同时，极限方法代替了无穷小量方法，无穷小量便被排斥在数学殿堂之外了。此后，无穷小和无穷大在微积分中已经没有重要地位，数学家们通常不承认它们是某种数，而把它们视为变化的趋势。

我们知道，模型论是现代数理逻辑的一个分支，主要是在第三次数学危机发生后关于数学基础的热烈争论中发展起来的。事实上，用模型来研究数学理论可追溯到非欧几何学的无矛盾性证明，当时就是通过建立欧氏几何模型，从而证明了非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性。然而，一般认为最早的模型论研究始于 20 世纪 20 年代，在 30 年代有所发展，到 1950 年左右，模型论正式成为一门新的学科。模型论的研究结果，被应用于许多数学分支，其中最重要的是它在分析方面的应用。

1960 年，美国数理逻辑学家 A·鲁宾逊（Abraham Robinson，1881-1974）运用现代数理逻辑的概念和方法，把“无穷小”和“无穷大”作为“数”引入实数结构，用模型论的方法建立了非标准分析，并于 1961 年 1 月在美国数学大会上宣布了他的研究。他证明，无穷小作为真正的数学对象是存在的，并且可以沿着另一条途径建立严格的微积

分基础。这一理论给人们带来的新信息是：无穷小“复活”了。鲁宾逊的研究指出：现代数理逻辑的概念和方法能为“无穷小”和“无穷大”作为“数”引入微积分提供合适的框架，因而使无穷小量堂而皇之地重返数学舞台，成为逻辑上站得住脚的数学中的一员。

1965年4月，鲁宾逊写了《非标准分析》一书，用无穷小重新建立了现代分析，使其思想广为流传。通过非标准分析，人们发现了一些新的事实，许多经典的证明通过非标准分析的方法达到实质性的明朗化。非标准分析逐渐发展成为一整套非标准数学，并产生了越来越大的影响，现已成功地应用于许多方面，如点集拓扑学、测度论、函数空间、概率论、微分方程、代数数论、流体力学、量子力学、理论物理和数理经济学等。

4.2.3 轰动一时的突变理论

20世纪早期，在第三次数学危机出现之后，数学家、逻辑学家们为了摆脱危机对数学基础问题展开了深入、广泛的研究。在这个过程中，数理逻辑得到了系统、全面的发展，它的证明论、递归论、模型论、公理集合论的思想和方法已被应用于越来越广的领域，对社会生产、人们的生活以及理论研究等起到了许多积极的作用。与此同时，集合论也不断地完善，并被广泛地应用于各个学科分支当中。由此，通过康托尔、弗雷歇（Frechet，1878-1973）、豪斯多夫（Hausdorff，1868-1942）、谢尔品斯（Sierpinski，1882-1969）等数学家的潜心研究，伴随着集合论产生的点集拓扑学也逐渐趋于成熟，演化成为一般拓扑学。1936年，由美国数学家惠特尼（Whitney，1907-1989）开创了一个新的拓扑学分支——微分拓扑学。20世纪50年代初，法国数学家托姆（Thom，1923-）对高维流形的分类理论进行深入研究，创立了配边理论（也称协边理论），从而使微分拓扑学获得长足进展。同时，流形上的分析——奇点理论、动力系统理论等取得了很大的发展。从奇点理论出发，托姆于20世纪60年代中期开创了一个新兴学科——突变理论的研究。“1966年，他对如何用数学原理来解释自然现象的问题发生了浓厚的兴趣……1969年，他的《生物学中的拓扑模型》出版，首次提出描述突变现象的数学模型。1972年，他的《结构稳定性与形态发生》一书出版，标志着突变理论正式诞生。”[①]

突变理论，实际上是研究自然现象或技术过程在发展过程中从一个状态跳跃式地变到另一个状态的数学学科。它涉及拓扑学、奇点理论和结构稳定性等数学分支。托姆用突变理论研究事物的状态在时空中表现的变化类型，利用奇点理论将突然变化分为七种基本类型，并在数学上加以严格证明。在此基础上，他用微分拓扑学对银河结构、胚胎发育、生命起源、语言现象、海浪形状、光的聚散等过程中的突变现象，进行解释和说

① 杜瑞芝. 数学史辞典[M]. 济南:山东教育出版社, 2000:227.

明，使人耳目一新。这样，突变理论很快就被应用到自然科学、经济学、心理学乃至政治、社会科学的研究中，并且硕果累累。

由此可见，与数学相关的分支学科模糊数学、非标准分析和突变理论都是在第三次数学危机的推动作用下产生和发展起来的，并且成果显著，影响深远。

4.3 第三次数学危机是整个科学发展的推动力

事实上，第三次数学危机，它的作用和影响还远远超出了数学本身的范围。因为在此之后，数学对其它科学的发展也起了积极的推动作用，数学的地位日益提高，特别是科学技术的日新月异，使数学的应用更加广泛，更加深入，科学数学化的趋势也越来越明显。

科学逐渐数学化，即数学的思维方法越来越广泛地成为一般科学的思维方法。20世纪的数学不只是作为记录的语言或计算的工具，也是一种重要的思维方法，是实验设计的有效手段，是各种工艺过程中管理和控制实现算法化的有效源泉，是现代科学发展的强大推动力。在 19 世纪末以前，数学家和一些自然科学家认为，数学的概念和方法在其范围之外未必也是有效的。例如纯数学中专为它的逻辑论证而制定的方法，如集合论方法等，就被认为对于解决自然科学、经济学和技术方面的任务是没有多大益处的。但是在 20 世纪，这些方法却越来越快地成为一般科学的思维方法和解决问题的途径。集合论，是 19 世纪时波尔查诺（B.Bolzano，1781-1848）、戴德金、康托尔对集合概念的基本特点作出比较严格的表达之后，才成为一种数学概念的。1908 年德国数学家策梅罗对集合概念作了第一个严格的说明，排除了康托尔集合论的某些悖论。随后，弗兰克尔、斯科朗对策梅罗的说明作了进一步的改进，在策梅罗、弗兰克尔、斯科朗的研究中得到明确说明的一般集合概念，起初只用于数学本身的范围，即只用于研究微积分的方法。可是后来发现，集合论是现代数学的基本学科之一，而布尔巴基学派甚至认为是数学的唯一基本学科。这样，集合论的应用范围被迅速扩大到了现代纯数学的一切领域，而且扩大到了在一定程度上运用数学的那些现代科学、技术和经济门类。因此，集合论的思维方法在我们这个时代获得了一般科学思维方法的地位。

实际上，在第三次数学危机之后，科学的数学化是当代科学发展的一个显著特征。现代科学中有越来越多的思维方法必须借助于数学，有越来越多的规律必须运用数学关系式表达，“任一领域中，基本方程都有可供选择的数学表达”[①]，特别是在物理学、生物科学等领域，这种情况更加明显。

① D.A.Grouws.Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning[M].New York:Macmillan Publishing Company,1992:175.

4.3.1 数学与物理学

从 20 世纪初开始，数学逐渐从线性数学转向非线性数学，从局部性质研究过渡到整体性质研究，从研究现实空间发展到研究一般的 n 维流形。正因为如此，微分几何趋向整体是一个自然的趋势。当人们了解了局部的性质之后，自然想知道它们的整体含义，但是意想不到的是，有整体意义的几何现象在局部也特别美妙，纤维丛就是这样。纤维丛是一个纯数学的概念，属于微分几何和拓扑学的范围。纤维丛理论对现代物理学的研究起了举足轻重的作用，其最突出的表现是在杨-米尔斯规范场中。因为规范场具有全域性的特征，这种全域性意味着只有把整个几何对象考虑在内才具有明显的各种性质。由此看来，粒子物理学的研究与纤维丛理论有着密切的关系。

4.3.2 数学与生物学

从 20 世纪初到二次世界大战时期，是实验生物学时期。孟德尔（Gregor Johann Mendel，1822-1884）是实验生物学的先驱，他用数理学科的实验分析方法取代传统的比较法，将生物统计方法应用于遗传学。在这个时期，遗传学和数量遗传学迅速成为生物学的领头学科。自战后以来，由于现代物理学和现代化学逐渐被广泛应用于生物科学，生物学的研究迅速达到分子水平，进而出现分子生物学。随后，数学则以更大的规模涌进了生物科学。这样，以生物研究为中心的交叉、边缘学科迅速地产生和发展。从 30 年代起，人们就开始倡导用系统理论来研究生物科学。美籍奥地利生物学家、一般系统论的创始人贝塔朗菲（Bertalanffy，1901-1972）那时就曾指出生命的本质是有机总体，并认为生物科学研究不能单凭分析的方法，更重要的是要从系统的角度加以探讨。他还指出，一般系统论是逻辑和数学的领域，它的任务是确立总的适用于系统的一般原则。随后，比利时物理学家普利高津（Prigogine，1917-2003）从热力学第二定律出发，运用最新的数理理论于 1970 年提出的“耗散结构理论”，以及 1973 年西德著名理论学家哈肯（Haken，1927-）以信息论、控制论和突变理论为基础，采用现代数学理论与动力学观察相结合的方法，提出的多维相空间理论，都在解决复杂系统从无序到有序的机制及其目的性问题方面发挥着重要的作用。美国生物学家艾根（Eigen Manfred，1927-）等人则将生命起源、生物进化的达尔文学说用在分子生物学水平上，通过巨系统高阶环理论，数学化为一个言之成理的自组织系统模型，并由此推导出一些关于生物的生殖、遗传、变异、进化的性状，从而为用系统理论研究生命科学开创了明确的途经。

20 世纪以来，现代化组织管理问题逐渐成为最突出的问题，所涉及的研究对象越来越复杂化，传统的分析思维方法已不足以解决这类问题，这就迫使人们不得不开始用整体的观念去考察“系统”，以达到定量和最优化的目标。作为系统科学理论基础的系统

论认为，所谓系统，是指由物质及其有机联系所构成的一个具有特定功能的综合体，其中的“联系”是指能量的流通和信息的交换和传送。因此，系统实际上是物质、能量和信息相互作用的统一体。而作为系统科学理论方法的系统工程学，则是对系统的物质、能量、信息的相互作用进行定量而全面的描写、调控和预测，从而达到最优设计、最优控制和最优目标的一门技术。它是在现代数学、控制论、信息论、电算技术、工程技术和管理科学基础上发展起来的一门跨学科的综合学科。人们发现，系统科学的内涵与生命研究的目标，在方法论方面竟是如此之合拍。系统科学是今天人类所能获得的最为有效的和唯一的思想武器自是毫无疑问的，而作为系统科学重要理论方法的数学，对于生物学的腾飞，其举足轻重的地位和责无旁贷的责任，也就不言而喻了。数学为生物科学研究开创了空前广阔的前景。数学生态学、数量生理学、数值分类学、数学生物力学等理论的创立，以及生物统计学、生物概率论、生物运筹学、生物信息论、生物控制论、生物方程式论、生物几何学、生物生产经济学的相继间世，雄辩地证明了生物学的数量化研究，乃是现代生物科学研究的必由之路。

对于现代的数学家来说，开拓一种适合生物科学的、社会科学的、智能科学的新的数学体系，称之为“有机的数学”。事实上，人们在这方面已经作了不少有益的探索。1965年美国控制论专家扎德创立了模糊数学，建立了一套推理逻辑，有利于解决生物特性难于数量化的问题。60年代末，法国数学家托姆基于拓扑学提出的突变理论，在研究生物、社会的突如其来的变异现象，例如胚胎变异、桥梁断裂、神经错乱、市场崩溃等不连续质变中大放异彩。另外，生物控制论、模糊信息论、模糊系统理论相继发展。由此看来，数学在辅助系统科学促进生物科学腾飞中，起到了不可磨灭的作用，同时也让自身不断开拓和完善。

4.3.3 数学与计算机科学

从第三次数学危机至今，一百多年过去了。这一百多年来，科学技术的发展改变了整个世界的面貌。从19世纪末20世纪初开始的自然科学革命至今仍在向纵深发展，面临着新的突破。具有伟大历史意义的电子计算机的出现和蓬勃发展，使人类进入信息社会。现代科技发展是以微电子技术为先导，以电子计算机科学为标志的。我们认为，从电子计算机的设计制造到大规模应用，处处都离不开数学；同时，电子计算机的广泛应用和迅速发展也开辟了许多新的数学领域，对现代数学的发展起着重大的推动作用。由此看来，电子计算机与数学之间存在着密切的联系。

计算机使数学家从繁重的机械劳动中解放出来而集中精力从事创造性劳动，由计算机控制的信息网造成一种好象把所有数学家的头脑都连在一起的趋势。这样，整个数学

界势必被联成一个有机整体。由于有了计算机，使数学的应用范围大大地扩展了，产生了诸如计算化学、计算生物学、计算语言学、计算经济学等众多的新的学科方向；同时，计算机的发展也开辟了数学自身发展的新方向，涉及到构造性数学的研究，采用构造性方法有助于数学直观和严格逻辑性的结合，促进人们数学直观能力的发展，影响到全部数学学科发展的总方向。

由此看来，通过数学的思维方法，我们可以认识世界，了解世界；同时许多创造性原理存在于数学之中。数学方法和数学关系已成为表达科学规律的不可或缺的力量，这就是科学数学化的哲学性质。科学数学化的哲学性质，决定了它的形式和程度。算术化、形式化和公理化都是通过科学规律中的数学表达式来影响科学发展的。数学思维的方法之所以能够越来越广泛地成为一般科学的思维方法，也正是由于数学关系式成为科学规律的组成部分。数学关系在科学理论中的比重，决定了科学数学化的程度，这个比重目前正在迅速增长，因而数学化也成为当代科学发展的显著特征。

第五章 第三次数学危机的哲学意蕴

由前面的内容可知，第三次数学危机起源于作为数学基础的集合论定义的不严密性和罗素悖论等集合论悖论的产生。为了消除悖论、摆脱危机，当时的数学家和哲学家们都做出了很大的努力，比如策梅罗发表了他的公理集合论，以罗素为代表的逻辑主义学派、以布劳威尔为代表的直觉主义学派、以希尔伯特为代表的形式主义学派之间围绕数学基础的问题产生了学派论争，而后，哥德尔不完全性定理的证明揭示了各派的弱点，关于第三次数学危机的哲学争论才逐渐暗淡下去。但是，第三次数学危机的影响是深远的，蕴含着丰富的哲学意义。

5.1 第三次数学危机使绝对主义数学真理观走向破灭

纵观数学的漫长发展史，我们不难发现数学真理问题一直倍受人们的关注，从最初的关于数学真理的绝对性、确定性、永恒性的认识理念，到后来产生的一系列新的数学发现，尤其是第三次数学危机引起的数学观念的巨大变革，都在说明数学家和哲学家对数学真理的不懈探索与研究，反映出数学真理的相对性。

5.1.1 数学真理中的形而上学

事实上，关于数学真理的绝对性、确定性和永恒性的观念有着悠久的历史渊源。“从毕达哥拉斯和柏拉图，到康德，又到二十世纪以来的西方分析哲学，哲学家们都想为数学真理在我们的知识大厦中找到一个合适的位置。”[①]

追述到古希腊，毕达哥拉斯学派认为，数学关系决定了一切，自然界是按数学原理构成的。他们用数学，特别是自然数去解释各种自然现象。之后的柏拉图（Plato，前427-前347）学派继承了毕达哥拉斯学派的观点，并有了进一步的发展，他们不仅希望用数学去理解自然界，而且要用数学来取代自然界本身，认为真理是某种超验的、永恒的理念，而数学的对象是他们所说的理念世界中的真实存在。因此，古希腊时期的很多哲学家都认为，自然界是按数学设计的，数学是自然界的绝对真理，并且展开了以数学真理为核心的数学哲学的探索和研究。

在中世纪的漫长黑夜里，宗教神学和经院哲学压制了一切科学的发展，数学哲学的研究当然也不可能有新的进展。随着文艺复兴运动的开始，宗教神学的精神桎梏逐渐被打破了，经院哲学也逐渐被人们所抛弃。当时，怀疑一切成为普遍的倾向，然而在旧世界的粉碎和瓦解中，数学却奇迹般地得到了保存。这样，人们关于数学绝对真理性的信念就进一步增强了。正如 M. 克莱因（Kline Morris，1908-1992）所说：“在各种哲学系

① 叶峰. 数学真理是什么[J]. 科学文化评论, 2005,(4):4.

统纷纷瓦解，神学上的信念受人怀疑以及伦理道德变化无常的情况下，数学是唯一被大家公认的真理体系。数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥的立足点；人们又把寻求真理的努力引向数学。”[①]

在这种历史形势下，毕达哥拉斯学派关于数量关系是宇宙本质的学说，已经和宗教神学紧密地结合在一起，从而形成了一种宗教神学化的数学哲学。其结果就是人们逐渐形成关于数学真理看似完美、实则虚假的形而上学的信条。其中主要的观点有，数学是绝对真理的化身，数学知识是确切知识的代表，数学真理具有唯一的、确定不变的、完美无缺的性质。按照这种理论，上帝是一个至高无上的数学家，而世界万物都是上帝严格地按照数学的方案创造出来的。16、17 世纪的大多数科学家和哲学家都持这种观点，如哥白尼、开普勒、伽利略、帕斯卡、笛卡尔、牛顿、莱布尼兹。

我们认为，数学哲学的这种宗教神学化所导致的数学真理形而上学的观念，虽然在一定程度上“保护”了数学的发展：把数学看成是宇宙的钥匙，提高了数学的地位，从而吸引更多的人进行数学研究；把数学观念当作回忆的产物，“这看起来有些荒谬，但却强调了想像、直观在数学中的作用”[②]。但是，这种形而上学的数学真理观却在更大程度上制约了数学知识本身的进一步发展。

例如，唯物主义的观点正确地反映了数学与物质世界的关系，但具有形而上学的性质，即认为数学只是对物质世界机械的反映，物质世界有什么，数学就只能表现什么。亚里士多德曾说过，“直线在一个方向上有大小，平面在两个方向上有大小，而立体在三个方向上有大小，除此之外，就没有其他的大小了，因为这三个已经是全部了……不同种的大小之间不能转化，譬如从长度到面积，从面积到体积都不能转化”[③]。由于这种形而上学的数学真理观念，阻碍了古希腊数学的发展。斯科特（Scott，1858-1931）曾指出：“通常都把用三角形的边表示其面积的公式归功于希劳，而这个公式对阿基米德说来几乎肯定是知道了的，但对他的同时代人说来，势必要认为它是邪说异端，因为这个公式牵涉到四个长度相乘，而这是同习惯于三维欧几里得空间的概念格格不入。如果阿基米德的继承者能表现出一些像他那样的大胆，丢开三维的限制，那么，数学方面一直到了十八、十九世纪才发现的东西，早就会发现了。”[④]由此可见，形而上学的数学真理观在很大程度上阻碍了数学的发展。

① [美]M.克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:251.
② 毛建儒. 论科学技术发展的社会因素[M]. 太原：山西人民出版社, 2004:181.
③ [美]M.克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979:101.
④ [英]斯科特. 数学史[M]. 候德润等译. 北京：商务印书馆, 1981:55-56.

事实上，在19世纪中叶以前，以绝对的确定性为基础的经典数学一直被人们所认同，数学真理绝对、确定、永恒的形而上学观念根深蒂固，就数学的发展历史来看，这种情况是由于非欧几何等非标准理论模型的建立、一系列新的数学发现和悖论的出现，尤其是第三次数学危机的产生，才逐渐发生了根本性的变化。

5.1.2 新的数学发现对形而上学的冲击

在数学史上，首先对真理的绝对确定性及其形而上学体系产生冲击的是，“19世纪以来的一系列迅猛的数学知识增长所带来的数学革命”，“……19世纪以来，极限论和实数理论奠定了分析学的可靠基础；而到中叶，非欧几何经过几代人呕心沥血的探索，终于破土而出；哈密尔顿的四元数和伽罗华的群论亦登台亮相”。①从此，数学的真理性遭到了直接的挑战。因而，从19世纪中叶起，人们就对数学真理开始了重新的思考。

我们认为，非欧几何、四元数代数等非标准模型的构造是对数学的绝对真理性的直接否定。因为在当时，就空间的问题而言，人们唯一能想到的理论就是欧氏几何，“欧几里德空间是一种文化积淀的产物”②；而对于数量关系的问题而言，算术则是当时的人们所能设想的唯一理论。但是，由于现在已经构造出了非标准的几何、算术和代数，那么这种关于数学绝对真理性观点就被证明是错误的了。然而，非标准模型的建立所造成的是两种（或几种）互不相容的数学理论同时存在的局面，并没有证伪原来的理论。例如，非欧几何是否定欧几里得的第五公设后演绎出的同样在逻辑上无懈可击的新几何学，但它并没有否定欧氏几何，而只是把欧氏几何变成了自己的一级近似理论，正如相对论力学把经典力学作为自己的一级近似理论一样。近代科学证明：在我们日常生活中这个不大不小、不远不近的空间里，欧氏几何是适用的；在宇宙空间中或原子核世界以及地球表面研究航海、航空等实际问题时，非欧几何更精确一些。

另外，对建立微积分学理论，牛顿、莱布尼兹的标准分析和鲁宾逊的非标准分析共存；在公理化集合论中，人们由于对选择公理的承认与否而有选择的集合论和非选择的集合论；就是人们认为最简单的自然数系统，也有把0算在内或算在外的自然数系统，而这两种系统在不同的场合有各自的方便性。事实上，多种几何学和算术理论都是合理的。这充分说明数学的真理性不是绝对的，因为数学的形式不是唯一的，而可以是多种多样的。

尤为重要的是，康托尔悖论、罗素悖论等一系列关于集合论和逻辑的悖论接踵而至，

---

① 黄泰安. 数学真理从神性化的形而上学到人性化的文化构建——兼评克莱因的“数学确定性的丧失”[J]. 兰州大学学报, 2001,(6):65-72.

② P.A.Heelan.Space−Perception and the Philosophy of Science[M].Berkeley:University of California Press, 1983:57.

还有选择性公理、连续统假设等问题给数学认识造成的困惑，这一切都从整体上动摇了以形而上学为基调的传统数学真理理念及其思想体系。而最令人震撼的是，在以希尔伯特为代表的形式主义和以罗素为代表的逻辑主义试图克服上述重重困难，有望建立严格的数学基础的关键时刻，诞生了在数学和逻辑史上具有里程碑意义的哥德尔定理。这一出乎意料的结果表明数学家所顶礼膜拜的公理化和形式化体系有其内在的局限性。正所谓“数学在经历了 15—17 世纪与神学的蜜月期，以及十八、十九世纪与自然科学结盟的美好岁月后，在有望建立终极的可靠的数学基础的时候，却发现曾经被视为天衣无缝的恢宏壮丽的数学大厦其实是建立在一片根基不稳的沙土之上。伽利略相信对数学真理，人们不会有不同意见，而现在由于对公理有了选择的可能，数学家在如何看待真理及知识的可靠性方面已不再有完全一致的见解。”①

如果说第一次数学危机摧毁了毕达哥拉斯的神秘数学堡垒，那么从 19 世纪中叶以来所发生的连续的数学革命，尤其是第三次数学危机，摧毁的就是整个西方近代科学哲学所依赖的形而上学的思想体系。柏拉图主义的数学观是古希腊常量数学的产物，康德哲学是以欧氏几何和牛顿物理学为基础的。如果我们依然用在较低的数学认识水平和经典数学理论基础上形成的数学真理观去对新的数学创造进行评价，必然只能产生认识上的困惑和盲点。在数学史上，每一次重大的数学进步都要突破固有的数学观念。经典数学中的确定性、永恒性和绝对性丧失了，而这个丧失并非仅仅是由于非欧几何、罗素悖论和哥德尔定理，而且来自于现代数学的新发展，如模糊数学、概率论、突变理论、分形、混沌等。这些新科学的诞生不仅扩大了数学的研究领域，而且丰富了数学的内涵。例如，在经典的微积分中，诸如魏尔斯特拉斯曲线、科契曲线、皮亚诺曲线等均被视为“病态的”或“数学怪物”，然而正是这些“病态”的“怪物”，在新兴的数学领域——分形中扮演着重要角色。事实上，数学在丧失某种旧的确定性的同时又获得了新的确定性。

总而言之，这些标准或非标准的数学理论各有其特定的实用范围，都是一种相对真理，是相对于认识的历史发展阶段而言的。由此看来，恪守毕达哥拉斯、柏拉图主义形而上学的绝对主义数学真理观，将在数学认识论上产生不可逾越的障碍和困惑。所以，抛弃形而上学及其各种变式是数学进一步健康发展的必然要求，而数学真理性的变革也是数学发展的必然趋势。

5.1.3 数学真理观的后现代转向

① 黄泰安. 数学真理从神性化的形而上学到人性化的文化构建——兼评克莱因的“数学确定性的丧失”[J]. 兰州大学学报, 2001,(6):65-72.

数学真理作为数学认识论的核心问题，既是关于数学知识的真实性、客观性的一个重要标志，也是衡量人类科学发展水平的一个基本尺度。随着近代数学的诞生，人们对数学真理的理解达到了新的高度，逐步形成了现代性的数学认识，其主要标志就是以形而上学为基础的绝对主义的真理观。然而，随之而来的后现代思潮的兴起，使得现代性的科学观念受到强烈的冲击，数学真理及其观念也相应地展现出许多不同于现代性观念的后现代特征。这些新特征极大丰富了数学真理的内涵，深刻地变革了关于数学真理的现代性观念，开拓了人类理性认识的新维度。可以说，数学真理观正逐步从现代性转向后现代性。

从形式上讲，数学真理观的后现代主义是一股源自现代主义但又反叛现代主义的思潮，它与现代主义之间是一种既继承又反叛的关系；从内容上看，数学真理观的后现代主义批判了形而上学的思维方式，反对绝对主义的数学真理观。后现代主义关注时代、关注现实。哲学是时代精神的精华，因此必须面对现实，紧跟时代，唯有如此才能从现实中吸取养分；哲学的批判精神也要求哲学直面现实、直面生活。后现代主义看重被现代性所忽视的一切，看重现代性之后和之外的一切，例如不确定性、异质性、无序、平面化等，而对于被现代性所看重的一切如原则、确定性、权威、统一性、规律等都加以拒绝。应该说，后现代的数学真理观是对现代主义的一次深刻的理论反省，抓住了现代主义的问题，击中了现代主义哲学的要害，有利于数学哲学朝着另一个方向发展。

（1）由唯一性、绝对性向多样性、相对性的理论转向

如前所述，现代性的数学真理观念源自于古希腊毕达哥拉斯、柏拉图主义的数学传统。其基本特点是对数学真理的唯一性、终极性、绝对性、永恒性的信仰。19 世纪以来，随着数学知识的发展，开始出现一系列解构现代性数学观念的思想萌芽。例如前面所提到的非欧几何的诞生，是数学观从现代性向后现代性转向的一个重要标志。非欧几何瓦解了长期以来人们对数学公理“不证自明”和“不予质疑”的认识观。数学公理不再是确定的、唯一的，而是多样变化的，不再是绝对意义上的而是有了相对的意义。

从 19 世纪中叶非欧几何的诞生到 20 世纪 30 年代哥德尔定理的产生这一段历史时期，数学的知识演变逐步解构了以完美性、永恒性和确定性为标志的绝对主义数学真理观。在机械的、僵化的、教条的、终极的法则和规则之下，把一切已有的或尚未发现的数学思想、理论、方法都归结和还原到固定的、唯一的、不变的、静止的基础主义数学教条上去，其结果只能是扼杀数学的创造性和生命力。实际上，数学研究应该从实现关于真理话语的永恒的、终极的宏大目标转向对有限的、形成性的和阶段性的目标追求。数学在刻画世界图式、探索宇宙奥秘的同时，更要关注现实问题，如当代科学前沿进展、

人工智能与数字化、经济增长与技术进步、由信息、通讯技术所营造的新的社会秩序、新的文化范式等；只有充分关注和体现时代命题，数学真理才能获得新的意义。20 世纪以来数学发展过程中许多重大的理论创新和突破都是这一新的认识范式的产物，例如随机数学、模糊数学、突变理论、分形与混沌理论等。

（2）由封闭、连续、线性的理论体系向开放、离散、非线性体系的转变

现代性数学真理观的一个基本特征就是对数学理论体系的封闭的、连续的、线性的、简单统一性的认识定位。然而，在 19 世纪以来的数学的发展和演变过程中，数学知识结构和理论体系，逐步被多样的、离散的、非线性的、不断变革的和开放的新的数学知识、理论和方法所取代。数学理论的多样化、开放性不仅使数学知识结构呈现出了层次性，而且赋予了数学真理更加丰富的内涵。

后现代的数学真理观在拒绝绝对主义、封闭性和完全自足的观念之后，其认识论上的转向就是赋予数学真理以进化、动态和开放的特征。从整体上看，相当大的一部分数学知识的真理性是取决于其公理体系的可靠性。然而，公理及其体系的可靠性却无法完全从数学中获得确认，它需要从其他的公理或数学的外部去寻找。罗素在分析了数学真理所具有的归纳主义倾向之后，提出了不同于其最初的逻辑主义实在论的主张，认为为了证明数学是真的，需要其他的方法和考虑。拉卡托斯强调数学的历史性和实践性，其学说超越了波普尔而与库恩的范式革命有共通之处。库恩主张把科学置于一个广泛的历史发展背景中去考察，这对于理解数学同样适用。数学是一门不断生长的知识，具有进化和社会学的特征。数学新知识及其真理性将随着知识接受检验程度的提高以及数学内部体系适应性的提高而不断地进行调节、修正和改进。对于经过多项指标检验的数学知识，可以赋予其相对稳定的价值。我们之所以相信科学的计算和方法，是因为它在日常生活、商业贸易、工程技术和科学研究中提供了准确无误的运算结果。正因为如此，人类才敢把载人航天器送上太空。与现实有关的数学命题的真理性随着数学的发展会呈现出越来越精确、越来越丰富的特点。

第三次数学危机彻底打破了人们试图建立严格的数学基础的梦想，绝对主义数学观开始走向破灭。特别是在信息时代，知识经济飞速发展的今天，在与计算机技术相互辉映的过程中，数学对科技和经济发展的作用越来越突出，数学成为推动科技和社会发展的直接动力，数学从幕后走到了台前。因此，创造数学、应用数学成为 20 世纪 80 年代以后数学研究的主要方向。

综上所述，从哲学的角度看，数学真理是存在的，在其适用范围内是真理，不容怀疑；但是任何数学真理在超出其适用范围的时候则不适用，所以不能把数学真理绝对化。

我们坚持认为数学真理是存在的，反对相对主义；我们又反对把数学真理绝对化，反对形而上学。在认识数学真理时，必须自觉地坚持辩证唯物主义的观点，既要承认数学真理的客观性、经验性和相对性，又要认识到数学真理同其他真理相比所具有的特殊性。只有这样，才能对数学的真理性问题作出正确的分析。

5.2 第三次数学危机使人类的思维方法发生了变革

“在人类认识史、思维史上，新的思维方法总是在旧的思维方法的内在矛盾获得充分暴露的基础上产生的”[①]。正如，在近代知性思维方法占主导地位，而它的产生是由于古代朴素的辩证思维方法充分暴露了自身的内在矛盾即内在的局限性。古代朴素的辩证思维方法虽然正确地反映了世界的运动、变化和发展，但是由于细节不清，在思维上是模糊和非科学的。近代思维方法就是要从整体深入到各个细节、从混沌的感性具体到抽象的认识。然而，当科学发展到一定的高度，积累了巨大数量的实证知识材料，需要在各个研究领域中系统有序地对其内在联系加以整理时，知性思维方法就不适用了，从而产生了另一种新的思维方法——现代辩证思维方法。

辩证思维的基本方法主要有归纳和演绎、分析和综合、从抽象上升到具体、逻辑的和历史的相一致等。尤其是后两种方法是辩证思维所特有的方法。

5.2.1 第三次数学危机导致了新的数学方法的产生

从第三次数学危机来看，逻辑主义、直觉主义和形式主义对数学的发展产生了广泛而深远的影响，促进了数学观的形成，从而为数学哲学的研究开辟了一个崭新的时代。同时，第三次数学危机也导致了新的数学方法的产生。整个数理逻辑，包括逻辑演算、证明论(元数学)、公理集合论、递归函数论(即能行性理论)、模型论等都是在这个时期产生和壮大起来的。它们不仅自身有丰富内容，而且也为计算机科学提供了重要的基础理论和工具。20 世纪纯粹数学的发展呈现出抽象性更高、基础更探入、统一性更强的特征和趋势，同以前整个数学相比内容更丰富，认识更深刻。

5.2.2 第三次数学危机表明悖论是科学发展的强大杠杆

第三次数学危机充分表明，数学的发展不是简单的、线性的，它的学科体系也不是永远和谐的，而是时常出现悖论。悖论，在数学的发展中直接导致了对相应理论的怀疑，如果一个悖论涉及的范围十分广泛，那么这种怀疑又有可能发展成为普遍的危机。数学发展的历史表明，悖论是“引发数学大加进展的契机”[②]，悖论的发现与相对解决与数学基础的深入研究之间存在着十分密切的关系，每一次危机的消除都会给数学带来许多

① 肖前. 马克思主义哲学原理(下)[M]. 北京：中国人民大学出版社, 2007:600.

② 黄展骥. 不同的“悖论观”[J]. 人文杂志, 1995,(6):113-116.

新内容、新认识，甚至是革命性的变化，使数学体系达到新的和谐，数学理论得到进一步深化和发展。尤其是“罗素的集合论悖论”震动了整个数学界，引起了人们对数学基础的不懈研究，经过几十年的争论之后，关于基础的讨论早已冷了下来，没有哪一学派成为主流，但是这场大争论却产生了丰硕成果，这次危机大大深化了人们对数学本质的认识。

由此看来，在科学发展的过程中，悖论的出现不是一种灾难和绝望，而是科学理论获得突破性发展的征兆，是科学发展的强大杠杆。因此，我们在科学研究中应该善于发现和提出悖论，具体可以从以下三个方面着手：

首先，应该具有正确的哲学指导思想，有怀疑和批判的头脑，善于进行求异思维。悖论是对原有理论或概念的反戈一击，如果没有对原有理论的怀疑批判眼光，而是固守传统、迷信僵化，那就不可能发现原有理论存在的问题，也就不可能提出悖论。因此，我们要发现悖论，首先应该用马克思主义哲学理论来武装自己的头脑。

其次，必须对现有理论知识有深入细致的研究和全面系统的理解。悖论是对现有理论中逻辑矛盾的揭示。如果我们对现有理论一无所知，或仅是一知半解，认识肤浅，那就不可能发现其中隐藏的逻辑矛盾，也就不可能发现悖论。因此，只有用怀疑批判的头脑对现有理论进行深入而系统的研究，才有可能发现悖论。

再次，还必须具有敢于坚持自己的观点、不畏权威和传统势力的大无畏精神。悖论往往是对原有经典和权威的一种叛逆。悖论一旦提出，可能会受到多方面的责难、压力，甚至迫害，如果没有为真理而献身的精神，是很难敢于公开提出悖论的。

综上所述，悖论——这种特殊的逻辑思维方法，是科学研究的一种重要方法，它对于促进科学理论产生突破性的发展，引导人们向未知领域的探索都具有重要意义。因此，我们必须重视对悖论方法论意义的研究，并自觉使用这种方法，不断发现和提出新的悖论，以促进科学理论的发展。

5.3 数学危机的发生具有循环性特征

由数学发展史上的三次危机，我们很自然会想到这样一些问题，如第四次、第五次、第六次数学危机是否还会相继发生？如果会，那么下一次危机将是在什么时候？数学危机是否具有共同的特征？笔者认为，数学危机具有循环性的特征，在一定程度上是可以认识和预测的。

5.3.1 实践的发展是数学危机的根源

一般来讲，危机是一种激化的、非解决不可的矛盾；从哲学上来看，矛盾是无处不

在、不可避免的。同样，数学中也有许多大大小小的矛盾，比如正与负、加法与减法、微分与积分、有理数与无理数、实数与虚数等等。但是，在数学的发展过程中还有许多深刻的矛盾，例如有穷与无穷，连续与离散，存在与构造，逻辑与直观，具体对象与抽象对象，概念与计算等。在整个数学发展的历史上，贯穿着矛盾的斗争与解决。而在矛盾激化到涉及整个数学的基础时，就产生数学危机。矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容，新的进展，甚至革命性的变革。这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力这一基本原理。整个数学的发展史就是矛盾斗争的历史，斗争的结果就是数学领域的发展。

人类最早认识的是自然数，从引进零、负数和分数就经历过斗争，引进负数，使减法能够进行，引进分数使乘法有了逆运算——除法，否则许多实际问题也不能解决。后来又由于无理数的发现导致了第一次数学危机。

第一次数学危机发生在古希腊，是发现无理数后引起的一系列矛盾，来源于毕达哥拉斯（Pythagoras，前580-前500）的以数为基础的宇宙模型和数是可公度的信条。在毕达哥拉斯看来，“万物皆数”，数就是整数或整数之比，而用整数之比表达的比叫做可公度比，意为相比两量可用共同度量单位量尽，这是毕达哥拉斯的信条。但是这一信条后来遇到了困难，因为有些数是不可公度的。希帕索斯（Hippasus）发现了：边长为1的正方形，其对角线与边长的比$\sqrt{2}$既不是一个整数也不能看成整数之比，或者简而言之，不是一个有理数。这就产生了矛盾。这样的矛盾导致了毕达哥拉斯以数为基础的宇宙模型的破产，历史上称之为第一次数学危机。为了解决危机，当时的学者做出了很大的努力，如柏拉图曾提出以几何为基础来建立宇宙模型，欧多克斯（Eudoxus，约前400-前347）也曾通过比例巧妙地解决毕氏体系问题，欧几里得则在他们的基础上建立第一个几何公理系统等。

第一次数学危机的影响是巨大的：首先，它推动了数学及其相关学科的发展。例如欧氏几何就是在第一次数学危机中产生的，数理天文学的发展也有赖于第一次数学危机。其次，它使古希腊数学基础发生了根本性的变化，即以数为基础转向以几何为基础，从而使数学的公理化成为可能，而数学公理化系统的建立，不仅是数学达到成熟的一个重要标志，对数学的发展也产生了决定性的影响。最后，数学公理化系统的建立，还对整个科学的发展起了巨大的作用。近代西方学者正是通过学习古希腊的数学公理系统，领悟并把握了古希腊的科学精神和科学方法，借助这种科学精神与科学方法，他们创立了近代科学。由此可见，第一次数学危机对近代科学乃至整个科学的发展起了巨大的作用。

这种矛盾、危机引起发展，改变面貌，甚至引起革命，在数学发展史上是屡见不鲜的。第二次数学危机是由无穷小量的矛盾引起的，它反映了数学内部有限与无限的矛盾。

第二次数学危机是指早期微积分不严格而产生的争论。17 世纪，英国数学家、物理学家、天文学家牛顿（Newton，1642-1727）和德国数学家、哲学家莱布尼兹创立了微积分。微积分产生之后，逐渐显示出它非凡的威力。许多对于初等数学无法解决的问题，至此迎刃而解。历史上任何一项重大理论的完成都是经过若干年辛勤培植的结果，不可能一开始就完整无瑕，微积分的新生也带着逻辑上的重大缺陷，由于对无穷小量的理解未及深透而遭受多方非议，产生了数学史上的第二次危机。

这是因为，微积分的基础是极限论，而牛顿、莱布尼兹的极限观念是非常模糊的。无穷小量——不论是牛顿的“刹那”或是莱布尼兹的微分——有时是零，有时不是零，在逻辑上都不能自圆其说。极限究竟是什么？无穷小量是什么？这些问题在今天看来是容易回答的，但在 19 世纪以前，却是数学上带有根本性质的难题，也是微积分理论基础的缺陷。牛顿在无穷小量上的模棱两可招致了鼎鼎大名的主观唯心主义哲学家贝克莱（Berkeley，1685-1753）的抨击，他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”。他说：“如果 x 取得一个增量 $i(i\neq 0)$，那么 x^n 的增量被 i 除是 $nx^{n-1}+n(n-1)/2x^{n-2}i+\cdots$.现在令 $i=0$ 求出 x^n 的导数 nx^{n-1}，假设 $i\neq 0$ 突然变为 $i=0$，这简直是明明白白的诡辩。”[①]贝克莱来说：“谁要仔细体会一下二阶或三阶导数，二阶或三阶微分，我想，他就没有必要计较上帝的任何细节了。”[②]

像牛顿一样，莱布尼兹的含混也触发了荷兰哲学家尼文太（Nierwentijt，1654-1718）的反对。他否认高阶微分的存在，也不赞成略去无穷小量。当时莱布尼兹还在世，但他没能作出圆满的答复。在反对微积分的人中，也不乏具有才能的数学家，如法国代数学家罗尔（Rolle，1652-1719）。贝克莱、尼文太等人的反对，虽然是消极的，但他们的论点都直指微积分的逻辑缺陷，都有一定的道理，因此激起了数学家们为解决这些问题而进行进一步的建设性工作。

直到 19 世纪，实数理论、集合论的创立，再加上法国数学家柯西（Cauchy，1789-1857）、德国数学家维尔斯特拉斯（Weierst ras，1815-1897）的极限理论，才完成了极限的严格定义（即 ε-δ 定义），微积分才完全建立在巩固的逻辑基础之上，从而结束了 300 多年的纷争和危机，并推动了复变函数论和实变函数论的发展。因此，第二次数学危机不仅导致了康托尔集合论的建立，从而为 20 世纪的数学发展提供了科学语言，

① 周勇. 第 2 次数学危机的影响和启示[J]. 数学通讯, 2005,(13):47.

② 周勇. 第 2 次数学危机的影响和启示[J]. 数学通讯, 2005,(13):47.

开创了新局面，而且推动了复变函数论和实变函数论的发展；同时，由于分析的严格使力学和工程技术中有极广应用的复变函数论和一个与物理学紧密结合的分析分枝——数学物理，得以繁荣和加速发展。

第三次数学危机是指集合论中悖论的发现所引起的数学家之间的争论。为了解决集合悖论，数学家们首先想到了集合论的公理化。策梅罗的形式集合论，对经典分析是适当的，然而其基础——公理化集合的相容性尚未证明。由于悖论和相容性问题所激发，从 19 世纪末到 20 世纪前 30 年间逐渐形成了关于数学基础的三大学派逻辑主义派、直觉主义派和形式主义派，他们之间的激烈争论，标志着对数学基础问题更深入、更本质的考察；同时，在此过程中，促进了数理逻辑的发展甚至整个科学的发展。值得注意的是，八十多年来对基础的根本问题所提出的解答——集合的公理化、逻辑主义、直觉主义和形式主义都没有取得令人满意的结果，没有对数学提供一个可以普遍接受的途径。这就是说第三次数学危机虽暂告解决，但仍潜伏着各种各样尚待解决的矛盾，这些矛盾随时都可能导致新的危机。

回顾这三次数学危机，我们可以认识到，数学是一门无限的科学，它的发展离不开社会实践，两者具有明显的因果联系。实践的发展是原因，数学的发展是结果。有什么样的实践，才会有什么样的数学。因此，实践对数学起着基础性的制约作用，决定整个数学发展的深度、广度和速度。实践是人们改造自然和改造社会的有意识的活动，是主观见之于客观的东西，是不断发展的。它的不断发展，必然要为数学不断地提出新的研究课题，迫使数学家们迎接新的挑战，鼓励他们大胆地提出新的思想方法，在此基础上逐渐形成数学知识的积聚。许多新的思想一开始总是不够成熟、不够完善的，在不断完善的过程中会不断地出现新的矛盾。在这些矛盾中有一对矛盾即有限与无限的矛盾，是数学的基本矛盾，当这对矛盾到了不可调和的地步，数学危机就产生了。所以，从哲学的角度讲，实践的发展是数学危机的根源。一次数学危机之后，又有新的思想方法、新的学科应运而生，旧的思想也相应得以完善和发展。由于人类的社会实践是一个无限的过程，所以我们永远无法消除危机的根源。一次危机解决了，然而危机的根源依然存在，经过一段时间后，危机将再次爆发。因此，数学危机具有循环性的特征。

数学危机称得上是数学革命的前奏曲，一次数学危机引起一场数学内部的大革命大发展，当然数学不能总是处于危机之中。事物的发展总是经过由肯定到否定，又由否定到否定之否定的两度转化和三个阶段，形成一个周期，表现为前进性和曲折性的对立统一，呈现出螺旋式的上升或波浪式前进的运动。每个周期内数学的发展可分为三个环节：知识积累、整理与危机、大发展。完成一个发展周期，数学便前进到更新、更高的阶段，

一个周期的终点，又是下一个周期的起点。从大发展到积累再到整理与危机，也是一个从量变到质变的演化过程，它们互相联系、互相交错。这个过程循环往复以至无穷，而每一循环的内容，都比较地进到了高一级的地步。

5.3.2 数学危机与科学发展具有同步性

三次数学危机，第一次发生在古希腊时期，第二次发生在资本主义发展时期，第三次发生在19世纪末20世纪初。这三个时期都是科学大发展的时期。

古希腊时代是科学的孕育期，希腊是科学精神的发源地，两千多年前希腊人所创造的光辉夺目的文化成就，为现代文明奠定了基础。在人类历史上，是希腊人第一次形成了独具特色的理性自然观，这正是科学精神最基本的因素。他们把自然作为一个独立于人的东西加以整体地看待；把自然界看成一个有内在规律的对象；同时发展了复杂精致的数学理论，以把握自然界的规律。对数学的尊重，是希腊人最为天才的表现，也是留给近代科学最宝贵的财富。希腊人还相信心灵是掌握自然规律最可靠的保证，因而极大地发展了逻辑演绎方法和逻辑思维。他们成功地将数学应用于天文学、静力学、地理学、光学等领域，并得出了高度量化的结论，为近代科学的诞生起了示范作用。在古希腊时代，由于科学知识的积累和社会的发展，使这一时期成为科学的第一次大整理阶段，经过第一次大整理，数学的逻辑体系基本确立，为之后科学的进一步发展奠定了基础。第一次数学危机正是完成整理过程中的必然产物。

在文艺复兴以后，近代实验科学正式诞生，近代科学诞生的主要标志是建立了一套独特的自然观和方法论——机械自然观和实验、数学方法论。在这个时期，科学实现了前所未有的大发展，主要表现在：哥白尼革命引起的天文学领域的大发展、新物理学的诞生、近代化学的诞生、近代生命科学的创始等。同时，资本主义的发展对科学提出了进一步要求，在理论与实验相结合的基础上完成了科学的第二次大整理，而伴随着新学科的诞生，第二次数学危机脱胎而出。

到了19世纪末20世纪初，各门科学均已相继成熟，严密和可靠的自然知识体系也已形成，科学的技术化和社会化成了这个时期的最突出特征。资本主义发展到了空前发达的阶段，于是对科学提出了更高的要求，使它的触角广泛伸展，许多科学已从定性的研究逐渐过渡到了定量的研究。在进行第三次科学大整理的同时，第三次数学危机又悄悄插足。

由此可见，数学危机的发生和整个科学技术的发展具有同步性，是科学积聚的结果，科学的新突破一完成则数学危机随之而来。

在第三次数学危机发生之前，由于人们对危机缺乏正确的认识和理解，常常造成一谈到危机就万分惊慌和束手无策的现象。实际上，我们通过正确地认识危机问题，可以更有效地认识自然、了解社会。每次危机的出现和解决都促进了数学的繁荣与发展，数学危机的发生预示着更新的创造和飞跃，促使了数学本身的发展，推进了科学发展的进程。从这个意义上讲，矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容、新的进展，使数学体系达到新的和谐，数学理论得到进一步深化和发展；整个数学的发展史就是矛盾斗争的历史，斗争的结果就是数学领域的发展。

总之，数学中的矛盾既然是固有的，它的激烈冲突——危机就不可避免。危机的解决给数学带来了许多新认识、新内容，有时也带来了革命性的变化。把 20 世纪的数学同以前全部数学相比，内容要丰富得多，认识要深入得多。第三次数学危机，使集合论成为一个完整的集合论公理体系（ZFC 系统），促进了数学基础研究及数理逻辑的现代性。在集合论的基础上，诞生了抽象代数学、拓扑学、泛函分析与测度论，数理逻辑也随之兴旺发达而成为数学有机体的一部分，代数数论的面貌也多次改变，变得越来越优美、完整。特别是二次大战之后，新成果层出不穷，从未间断。数学呈现无比兴旺发达的景象，而这正是人们同数学中的矛盾、危机斗争的产物。数学作为系统是一个开放的系统，数学的发展史，就是这个大系统的发展史，三次数学基础的危机及其带来的数学基础的大发展，说明了数学这个大系统从无序不断走向有序，系统的结构在发展过程中不断地得到调整和充实。

第六章 结 语

对第三次数学危机的研究，使我们对数学危机有了深入的认识，即在其发生的时候不会引起数学研究的萧条，反而刺激数学学科本身的发展和一些原有数学观念的突破和创新。每一次重大的数学进步都要突破固有的数学观念，第三次数学危机动摇了以形而上学为基调的传统数学真理理念及其思想体系，经典数学中的确定性、永恒性和绝对性丧失了。这样，数学真理性的变革成为是数学发展的必然趋势。

第三次数学危机也导致了新的数学方法的产生：整个数理逻辑，包括逻辑演算、证明论(元数学)、公理集合论、递归函数论(即能行性理论)、模型论等都是在这个时期产生和壮大起来的，它们不仅自身有丰富内容，而且也为计算机科学提供了重要的基础理论和工具；悖论——这种特殊的逻辑思维方法，是科学研究的一种重要方法，它对于促进科学理论产生突破性的发展，引导人们向未知领域的探索都具有重要意义，因此，我们必须重视对悖论的方法论意义的研究，并自觉使用这种方法，不断发现和提出新的悖论，以促进科学理论的发展。

第三次数学危机，产生了关于数学基础的三大学派论争，促进了数学基础的研究，使数理逻辑得到了充分的发展；刺激了数学及其相关分支学科的发展，如模糊数学、非标准分析和突变理论都是在第三次数学危机的推动作用下产生和发展起来的；同时对整个科学的发展也起了巨大的推动作用，带来了现代科学发展的黄金时代。

数学发展的历史表明，对数学基础的深入研究、悖论的出现和危机的相对解决有着十分密切的关系，每一次危机的消除都会给数学带来许多新内容、新认识，甚至是革命性的变化，使数学体系达到新的和谐，数学理论得到进一步深化和发展。数学家对悖论的研究和解决促进了数学的繁荣和发展，数学中悖论的产生和危机的出现，不单是给数学带来麻烦和失望，更重要的是给数学的发展带来新的生机和希望。数学中关于悖论和危机的历史也正是说明了这一点：已有的悖论和危机消除了，又产生新的悖论和危机。但是人的认识是发展的，悖论或危机迟早都能获得解决。“产生悖论和危机，然后努力解决它们，而后又产生新的悖论和危机。”这是一个无穷反复的过程，也就不断推动着数学的发展，这个过程也是数学思想获得重要发展的过程。

参 考 文 献

[1] [美]M. 克莱因. 古今数学思想(第四册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海:上海科学技术出版社, 1979.

[2] 吴哲辉. 悖论思维与科学发展[J]. 山东科技大学学报, 2000,(3).

[3] 张月华. 康托与集合论的创立[J]. 科技信息, 2008,(3).

[4] 胡作玄. 第三次数学危机[M]. 成都:四川人民出版社, 1985.

[5] D.Hilbert.Über das Unendliche[J].Mathematische Annalen,1926,(95).

[6] P. 希尔顿(Hilton). 今日数学和科学的教育:流行着的错误的"对分法"[C]//国际数学教育大会(ICME). 第三届国际数学教育会议论文集. 1976.

[7] 石纯一, 王家廞. 数理逻辑与集合论[M]. 北京:清华大学出版社, 2000.

[8] 张景中. 数学与哲学[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2008.

[9] 张建军. 科学的难题——悖论[M]. 杭州:浙江科学技术出版社, 1990.

[10] 王雨田. 现代逻辑科学导引[M]. 北京:中国人民大学出版社, 1987.

[11] [英]罗素. 数理哲学导论[M]. 晏成书译. 北京:商务印书馆, 1982.

[12] [美]保罗・贝纳塞拉夫等. 数学哲学[M]. 朱水林等译. 北京:商务印书馆, 2003.

[13] 张莉敏. 悖论与数理逻辑的发展探析[D]. 开封:河南大学, 2003.

[14] 夏基松, 郑毓信. 西方数学哲学[M]. 北京:人民出版社, 1986.

[15] 张家龙. 评数学基础中的直觉主义学派[J]. 自然辩证法研究, 1992,(4).

[16] 张其亮. 数学基础问题的哲学观及其启示[J]. 高等理科教育, 2008,(3).

[17] [德]赫尔曼・韦尔. 大卫・希尔伯特及其数学工作[C]. 数学史译文集. 上海:上海科学技术出版社, 1981.

[18] [古希腊]亚里士多德. 物理学[M]. 张竹明译.北京:商务印书馆, 1982.

[19] H.Weyl.Hermann Obituary:David Hilbert.1862-1943[J].Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London,1944,(4).

[20] Danielle Macbeth.The Problem of Mathematical Truth[J].Studies in Logic,2009,(2).

[21] 杜瑞芝. 数学史辞典[M]. 济南:山东教育出版社, 2000.

[22] D.A.Grouws.Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning[M].New York:Macmillan Publishing Company,1992.

[23] 叶峰. 数学真理是什么[J]. 科学文化评论, 2005,(4).

[24] [美]M. 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海:上海科学技术出版社, 1979.

[25] 毛建儒. 论科学技术发展的社会因素[M]. 太原:山西人民出版社, 2004.

[26] [英]斯科特. 数学史[M]. 候德润等译. 北京:商务印书馆, 1981.

[27] 黄泰安. 数学真理从神性化的形而上学到人性化的文化构建——兼评克莱因的“数学确定性的丧失”[J]. 兰州大学学报, 2001,(6).

[28] P.A.Heelan.Space-Perception and the Philosophy of Science[M].Berkeley:University of California Press,1983.

[29] 肖前. 马克思主义哲学原理(下)[M]. 北京:中国人民大学出版社, 2007.

[30] 黄展骥. 不同的“悖论观”[J]. 人文杂志, 1995,(6).

[31] 周勇. 第 2 次数学危机的影响和启示[J]. 数学通讯, 2005,(13).

[32] 梁宗巨. 世界数学史简编[M]. 沈阳:辽宁人民出版社, 1980.

[33] 韩雪涛. 数学悖论与三次数学危机[M]. 长沙:湖南科学技术出版社, 2007.

[34] 张奠宙. 20 世纪数学经纬[M]. 上海:华东师范大学出版社, 2002.

[35] 武杰. 跨学科研究与非线性思维[M]. 北京:中国社会科学出版社, 2004.

[36] [美]斯图尔特·夏皮罗. 数学哲学对数学的思考[M]. 郝兆宽, 杨睿之译. 上海:复旦大学出版社, 2009.

[37] [美]周·道本. 康托的无穷的数学和哲学[M]. 郑毓信, 刘晓力译. 大连:大连理工大学出版社, 2008.

[38] [加]弗拉第米尔·塔西奇. 后现代思想的数学根源[M]. 蔡仲, 戴建平译. 上海:复旦大学出版社, 2005.

[39] 刘杰. 论数学的真理困境——从实在论的角度看[J]. 哲学研究, 2006,(12).

[40] 宋晋凯. 哥德尔的概念实在论[D]. 太原:山西大学, 2009.

[41] 曲宏宇. 亚伯拉罕·鲁滨逊的数学哲学思想探析[D]. 大连:大连理工大学, 2005.

[42] 凌文豪. 悖论的本质及其消解[D]. 开封:河南大学, 2000.

[43] 薛永强. 普特南内在实在论真理观透视[D]. 哈尔滨:黑龙江大学, 2008.

致 谢

岁月荏苒，光阴似箭。转眼间，三年的研究生学习生涯伴随着论文的定稿即将结束，我心中如释重负也满怀感激。

本论文是在我的导师武杰教授的悉心指导和亲切关怀下完成的。三年来，武老师严谨的科研态度、广博渊深的知识和忘我的敬业精神，深深地感染了我，使我学到了许多理论知识和实践经验，使我懂得了在奋斗的过程中要自信、要坚持。在学习和生活方面，武老师都给予我极大的帮助和关心，在此，我表示由衷的感谢。

感谢毛建儒教授，在百忙之中抽空指导，虽然时间短暂，却启发了我的灵感。

感谢李志勤教授、李润珍教授，以及黄勇老师等哲学研究所的所有老师，他们的辛勤工作创造了一个良好的学习环境和学术氛围，使我受益匪浅。

感谢 07 级科哲班的全体同学，三年的同窗生涯中，我们互相帮助和鼓励，在精神上和生活上给了我向上的动力。

最后我要深深地感谢我的父母、我的家人，正是他们温馨的关怀和不懈的支持，使我顺利完成了攻读硕士学位期间的学习和论文研究工作。

再次感谢所有关心和帮助过我的人们！

戴峰

2010 年 4 月

攻读学位期间发表的学术论文目录

[1] 戴峰. 对数学真理问题的思考[J]. 山西煤炭管理干部学院学报, 2009,22(2):133-134.

[2] 戴峰, 武杰, 李志勇. 混沌视角下的教学设计[J]. 沧桑, 2009,(4):199-201.

哲学视域下的第三次数学危机

作者：　戴峰
学位授予单位：　太原科技大学